

# UNIVERSITÉ HENRI POINCARÉ

## FACULTÉ DES SCIENCES

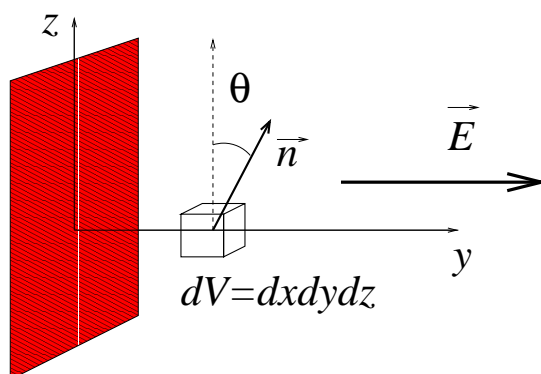
DIPLÔME : Licence de Physique  
 Epreuve de : Ondes et Vibrations I  
 Examen de Septembre  
 Date : septembre 2002  
 Horaire :

SUJET D'EXAMEN :  
 Rédacteur : B. Berche  
 Documents non autorisés  
 Calculatrices autorisées  
 Durée conseillée : 1 h 30.

### Propriétés diélectriques d'un milieu cristal liquide semi-infini

Un matériau anisotrope a des propriétés différentes selon les directions de l'espace. C'est le cas des cristaux liquides constitués de molécules allongées orientées majoritairement, pour des raisons d'encombrement géométrique, dans la direction d'un vecteur unitaire appelé directeur et noté  $\vec{n}$ . Les propriétés physiques sont donc très différentes parallèlement à  $\vec{n}$  et dans le plan perpendiculaire. Dans l'approximation linéaire, la réponse du milieu diélectrique anisotrope est plus forte dans la direction parallèle à  $\vec{n}$  que dans le plan perpendiculaire :

$$\vec{P}_{\parallel} = \varepsilon_0 \chi_{\parallel} \vec{E}_{\parallel}, \quad \vec{E}_{\parallel} = (\vec{E} \cdot \vec{n}) \vec{n}, \quad \vec{P}_{\perp} = \varepsilon_0 \chi_{\perp} \vec{E}_{\perp}, \quad \chi_{\parallel} > \chi_{\perp}.$$



On considère un espace semi-infini limité par un plan de verre  $xOz$  en  $y = 0$  et s'étendant sur  $y > 0$ , rempli d'un milieu cristal liquide.

## 1. Energie d'anisotropie

Pour un champ d'orientation arbitraire, montrer que la polarisation s'écrit  $\vec{P} = \varepsilon_0 [\chi_{\perp} \vec{E} + \chi_a (\vec{E} \cdot \vec{n}) \vec{n}]$ , où l'on définira la susceptibilité anisotrope  $\chi_a$ .

Cette expression permet de calculer le travail nécessaire pour faire tourner l'élément de volume  $dV = dx dy dz$  de  $\theta = 0$  à  $\theta$  :  $\frac{dW}{dV} = \int_0^{\theta} |\vec{P} \wedge \vec{E}| d\theta$  où  $\theta$  est indiqué

sur la figure. On choisira  $dx = dz = 1$  en raison de l'invariance par translation dans ces directions. Montrer que l'on peut définir la densité d'énergie potentielle d'anisotropie

$$u_a = \frac{dU_a}{dy} = -\frac{1}{2}\varepsilon_0\chi_a E^2 \sin^2 \theta.$$

Tracer  $u_a(\theta)$ . Pour quelle orientation du vecteur directeur cette énergie est-elle minimale ?

## 2. Energie élastique et profil d'équilibre

Si un traitement approprié est appliqué sur le verre, le vecteur directeur au niveau de la surface  $xOz$  est contraint à être parallèle à ce plan :  $\vec{n}(y=0) \equiv \vec{u}_z$ . Lorsque l'on applique un champ électrique perpendiculaire à la surface de verre, les molécules tendent à s'orienter dans le sens du champ et l'angle  $\theta$  du directeur par rapport à l'axe  $Oz$  est une fonction de la coordonnée  $y$ . La surface induit alors une contrainte élastique de la forme  $u_e = \frac{dU_e}{dy} = \frac{1}{2}k \left(\frac{d\theta}{dy}\right)^2$ . Le densité d'énergie  $u_{\text{tot}}[\theta(y), d\theta/dy] = u_e + u_a$  est une fonctionnelle de  $\theta(y)$ . A l'équilibre, l'énergie totale

$$U_{\text{tot}} = \int_0^\infty u_{\text{tot}}[\theta(y), d\theta/dy] dy$$

est minimale. Le profil  $\theta(y)$  à l'équilibre est donc solution de l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dy} \frac{\partial u_{\text{tot}}}{\partial (d\theta/dy)} - \frac{\partial u_{\text{tot}}}{\partial \theta} = 0$$

et  $u_e - u_a$  est une constante. Justifier ces résultats par une analogie avec la mécanique analytique.

Partant de l'intégrale première  $u_e - u_a$  dont on évaluera la valeur en  $y \rightarrow \infty$  où  $\theta \rightarrow \pi/2$ , déduire l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\xi} = \frac{d\theta}{\cos \theta}.$$

Définir  $\xi$  et donner ses dimensions. On rappelle que  $d \left[ \ln \tan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \right] = -\frac{d\theta}{\cos \theta}$ . Etablir l'expression du profil  $\theta_0(y)$  à l'équilibre. Etudier les comportements asymptotiques à l'ordre le plus bas lorsque  $y \rightarrow 0$  ( $\frac{d}{dt} \text{Arctan } t = \frac{1}{1+t^2}$ ) et lorsque  $y \rightarrow \infty$  ( $\text{Arctan } t \sim t$  lorsque  $t \rightarrow 0$ ). Tracer l'allure de  $\theta_0(y)$ .