

# UNIVERSITÉ HENRI POINCARÉ

## FACULTÉ DES SCIENCES

DIPLÔME : Licence de Physique

Epreuve de : UE 8a

Examen final

Date : 31 mai 2001

Horaire : 14h00 à 16h00

SUJET D'EXAMEN :

Rédacteurs : B. Berche et A. Schuhl

Formulaire autorisé

Calculatrices autorisées

Durée : 2h00

On demande de traiter 4 exercices au choix sur les 5.

### 1. Effet Compton

Une particule 2, de masse nulle et de quadri-impulsion  $p_2^\mu$ , entre en collision élastique avec une particule 1, de masse  $m_1$  initialement au repos. Après le choc les 4-impulsions sont notées  $p_1'^\mu$  et  $p_2'^\mu$ .

- Exprimer, pour chacune des particules, les relations entre énergie et quantité de mouvement avant et après le choc.

- Exprimer le carré invariant de  $p_1'^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu - p_2'^\mu$  et en déduire  $p_2'$  en fonction de  $E_1$ ,  $E_2$  et  $\theta$ , l'angle d'émission de la particule 2 par rapport à sa direction incidente.

- Exprimer aussi  $\frac{1}{p_2'} - \frac{1}{p_2}$ , puis  $\lambda_2' - \lambda_2$  en fonction de  $\theta$ .

### 2. Désintégration

On considère la désintégration d'une particule  $a$  de masse  $m_a$  initialement au repos en deux particules 1 et 2 de masses  $m_1$  et  $m_2$ , d'énergies  $E_1$  et  $E_2$  et de quantités de mouvement  $\mathbf{p}_1$  et  $\mathbf{p}_2$ . La conservation de  $p^\mu$  peut s'écrire à partir de  $p_2^\mu = p_a^\mu - p_1^\mu$  ou de  $p_1^\mu = p_a^\mu - p_2^\mu$ .

- Déduire des invariants associés à ces deux expressions les valeurs de  $E_1$  et  $E_2$  en fonction des masses.

- Application à la désintégration  $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$ . On donne  $m_{\Lambda^0} = 1.116 \text{ GeV}/c^2$ ,  $m_p = 0.938 \text{ GeV}/c^2$  et  $m_{\pi^-} = 0.140 \text{ GeV}/c^2$ , calculer les énergies du proton et du méson  $\pi$  produits.

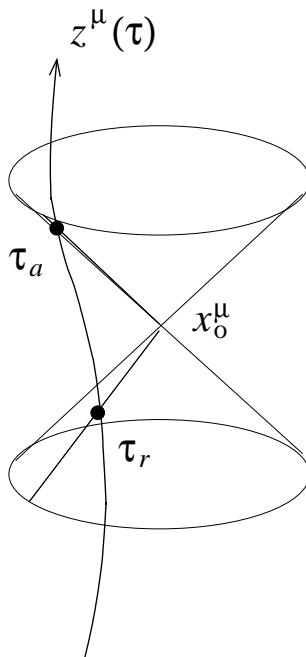
### 3. Décalage spectral gravitationnel

On imagine un monde hypothétique dans lequel la valeur de la constante universelle de gravitation est  $10^9$  fois plus élevée. On mesure (au niveau de la mer) la fréquence d'une transition électronique entre deux niveaux de l'atome d'hydrogène. Quelle erreur relative commet-on par rapport à la fréquence propre que l'on mesurerait dans l'espace à grande distance de toute source de gravitation ? Soit  $\nu_0 = 4.565 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$  cette valeur de référence, à quelle longueur d'onde en Å cela correspond-t-il et quelle serait la valeur de la fréquence et de la longueur d'onde mesurées au niveau de la mer ? Verrait-on cette transition ? On donne  $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$  et la masse de la Terre  $M = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ .

## 4. Charge en mouvement arbitraire

On se propose de retrouver (et justifier) l'expression du quadri-potentiel  $A^\mu$  d'une charge en mouvement arbitraire.

L'observateur est en  $x^\mu$ , la ligne d'univers de la charge est paramétrée par son temps propre  $z^\mu(\tau)$ , on note  $R^\mu(\tau) = x^\mu - z^\mu(\tau)$  la position relative et sa valeur retardée est notée  $[R^\mu] = x^\mu - z^\mu(\tau_0) = (c(t - t_0), \mathbf{R}(t_0))$  avec  $|\mathbf{R}(t_0)| = c(t - t_0)$  ou, de manière équivalente,  $[R_\mu R^\mu] = 0$ .



Dans le référentiel où la charge est instantanément au repos, en notation tridimensionnelle, rappeler l'expression du potentiel scalaire  $\phi(\mathbf{x}, t)/c$  où  $\mathbf{x}$  repère la position de l'observateur. En cherchant un quadrivecteur dont la partie temporelle redonne l'expression ci-dessus, donner l'expression du quadri-potentiel  $A^\mu$  d'une charge en mouvement arbitraire, puis en déduire le potentiel vecteur  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ .

## 5. Mouvement sous champ $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$

On considère deux champs électrique et magnétique uniformes et parallèles,  $\mathbf{E} = E\mathbf{u}_z$  et  $\mathbf{B} = B\mathbf{u}_z$ .

• Exprimer les composantes du tenseur champ électromagnétique covariant  $F_{\mu\nu}$ , puis écrire l'équation du mouvement

$$m \frac{dv_\mu}{d\tau} = q F_{\mu\nu} v^\nu$$

sous forme matricielle pour les composantes contravariantes de la vitesse.

• On choisit comme conditions initiales à  $\tau = 0$  :  $v^1(0) = u$ ,  $v^2(0) = v^3(0) = 0$ . Exprimer  $v_\mu(0)v^\mu(0)$  et en déduire  $v^0(0)$ .

• Pour résoudre les deux systèmes couplés pour les composantes de  $v^\mu(\tau)$ , on choisira d'écrire les solutions générales sous forme trigonométrique ou hyperbolique et on veillera à respecter l'invariant  $v_\mu(\tau)v^\mu(\tau)$  à tout instant.

## Formulaire

Transformation de Lorentz :

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + (\gamma - 1) \frac{(\mathbf{r}\vec{\beta})\vec{\beta}}{\beta^2} - \vec{\beta}\gamma ct,$$

$$ct' = \gamma(ct - \vec{\beta}\mathbf{r}).$$

Rapidité :

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \eta & -\sinh \eta \\ -\sinh \eta & \cosh \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}, \quad \beta = \tanh \eta.$$

Transformation des vitesses :

$$\mathbf{v}'_{\parallel} = \frac{\mathbf{v}_{\parallel} - \vec{\beta}c}{1 - \vec{\beta}\mathbf{v}/c}, \quad \mathbf{v}'_{\perp} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \vec{\beta}\mathbf{v}/c} \mathbf{v}_{\perp}.$$

Calcul  $k$  :  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  (en mouvement inertiel à vitesse  $\mathbf{v}$  par rapport à  $\mathcal{R}$ ) sont synchronisés à  $t = t' = 0$ . Un signal émis depuis  $\mathcal{R}$  à l'instant  $T$  est reçu dans  $\mathcal{R}'$  à  $T' = kT$  avec

$$k = \sqrt{\frac{1 + |\mathbf{v}|/c}{1 - |\mathbf{v}|/c}}.$$

Quadrivecteurs contravariants :

$$A^{\mu} = (A^0, A^i) = (A^0, \mathbf{A}), \quad \mu = 0, \dots, 3, \quad i = 1, \dots, 3,$$

tel que par transformation de Lorentz entre deux référentiels inertiels ( $\mathcal{R}'$  en translation uniforme par rapport à  $\mathcal{R}$  à vitesse  $\beta c$  suivant l'axe 1) on ait ( $\vec{\beta} = \mathbf{v}/c$ ,  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ )

$$A'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} A^{\nu}, \quad [\Lambda^{\mu}_{\nu}] = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quadrivecteur covariant :

$$A_{\mu} = (A_0, A_i) = (A^0, -A^i).$$

Contraction invariante :

$$A_{\mu} A^{\mu} = (A^0)^2 - \mathbf{A}^2.$$

Dérivée covariante :

$$\partial_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right).$$

D'Alembertien :

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2.$$

Tenseur deux fois contravariant :  $T^{\mu\nu}$  tel que

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\sigma \Lambda^\nu_\tau T^{\sigma\tau}.$$

Tenseur deux fois covariant :

$$[T_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} T_{00} & T_{0j} \\ T_{i0} & T_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{00} & -T^{0j} \\ -T^{i0} & T^{ij} \end{pmatrix}.$$

Tenseur mixte :

$$[T^\mu_\nu] = \begin{pmatrix} T^0_0 & T^0_j \\ T^i_0 & T^i_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{00} & -T^{0j} \\ T^{i0} & -T^{ij} \end{pmatrix}.$$

Métrie de Minkowski :

$$dx^\mu = (cdt, d\mathbf{r}), \quad ds^2 = dx_\mu dx^\mu = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2.$$

Tenseur métrique :  $g_{\mu\nu}$  tel que

$$dx_\mu = g_{\mu\nu} dx^\nu.$$

Tenseur métrique de Minkowski en cartésiennes ou sphériques :

$$dx^\mu = (cdt, dx, dy, dz), \quad [g_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$dx^\mu = (cdt, dr, d\theta, d\varphi), \quad [g_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Quadri-vitesse, quadri-accélération :

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = (\gamma c, \gamma \mathbf{v}), \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad a^\mu = \frac{dv^\mu}{d\tau} = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}.$$

Quadri-impulsion :

$$p^\mu = mv^\mu = (E/c, \mathbf{p}) = (\gamma mc, \gamma m\mathbf{v}),$$

$$p_\mu p^\mu = E^2/c^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2.$$

Action et lagrangien de la particule libre :

$$S = -mc \int ds = \int L dt,$$

$$L = -mc \frac{ds}{dt} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}$$

$$\delta S = m \int \frac{dv_\mu}{d\tau} d\tau \delta x^\mu = 0, \quad m \frac{dv_\mu}{d\tau} = 0.$$

4-courant :  $j^\mu = (\rho c, \mathbf{j})$ , conservation de la charge

$$\partial_\mu j^\mu = 0.$$

4-potentiel :  $A^\mu = (\phi/c, \mathbf{A})$ , jauge de Lorenz et équation des ondes

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \quad \partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \mu_0 j^\nu.$$

Action sous champ :

$$S = \int \left( -mc(dx_\mu dx^\mu)^{1/2} - q A_\mu dx^\mu \right),$$

$$\delta S = \int \left[ m \frac{dv_\mu}{d\tau} - q \left( \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} v^\nu - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} v^\nu \right) \right] d\tau \delta x^\mu = 0,$$

$$m \frac{dv_\mu}{d\tau} = q (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) v^\nu = q F_{\mu\nu} v^\nu.$$

Tenseur champ électromagnétique :

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu}.$$

$$[F^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix},$$

$$[\bar{F}^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z/c & -E_y/c \\ B_y & -E_z/c & 0 & E_x/c \\ B_z & E_y/c & -E_x/c & 0 \end{pmatrix}.$$

Transformation des champs électromagnétiques :

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel},$$

$$\mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel},$$

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \vec{\beta}c \wedge \mathbf{B}_{\perp})$$

$$\mathbf{B}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - (\vec{\beta}/c) \wedge \mathbf{E}_{\perp}).$$

Invariants du champ électromagnétique :

$$-\frac{1}{2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \mathbf{E}^2/c^2 - \mathbf{B}^2, \quad -\frac{1}{4}\bar{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}/c.$$

Equations de Maxwell covariantes :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu, \quad \partial_\mu \bar{F}^{\mu\nu} = 0.$$

Courbure de Gauss, métrique radiale et déviation géodésique :

$$K_G = \frac{1}{2rg_{rr}^2} \frac{\partial g_{rr}}{\partial r}, \quad \frac{d^2 \xi}{ds^2} = K_G \xi.$$

Métrique de Schwarzschild ( $r_S = 2GM/c^2$ ) :

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2(1 - r_S/r)dt^2 - \frac{dr^2}{1 - r_S/r} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

Tenseur métrique de Schwarzschild :  $dx^\mu = (cdt, dr, d\theta, d\varphi)$ ,

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 1 - r_S/r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1 - r_S/r)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$