Correction examen juin 2001

Chaque exercice est noté sur 5 points. Il fallait en traiter 4 au choix.

1. Effet Compton

Invariants :

$$p_{1\mu}p_1^\mu = E_1^2/c^2 = {E'}_1^2/c^2 - \mathbf{p}'^2_1 = m_1^2c^2$$
$$p_{2\mu}p_2^\mu = E_2^2/c^2 - \mathbf{p}_2^2 = {E'}_2^2/c^2 - \mathbf{p}'^2_2 = 0$$

Conservation :

$$\begin{aligned} {p'}_{1\mu}{p'}_1^\mu &= p_{1\mu}p_1^\mu + p_{1\mu}p_2^\mu - p_{1\mu}{p'}_2^\mu \\ &+ p_{2\mu}p_1^\mu + p_{2\mu}p_2^\mu - p_{2\mu}{p'}_2^\mu \\ &- {p'}_{2\mu}p_1^\mu - {p'}_{2\mu}p_2^\mu + {p'}_{2\mu}{p'}_2^\mu \end{aligned}$$

$$m_1^2c^2 = m_1^2c^2 + 2\underbrace{E_1E_2/c^2}_{E_1p_2/c} - 2\underbrace{E_1E'_2/c^2}_{E_1p'_2/c} - 2\underbrace{E_2E'_2/c^2}_{p_2p'_2/c} + 2\underbrace{\mathbf{p}_2\mathbf{p}'_2}_{p_2p'_2\cos\theta}$$

On a donc finalement

$$\frac{1}{p'_2} - \frac{1}{p_2} = \frac{c}{E_1}(1-\cos\theta) = \frac{1}{m_1c}(1-\cos\theta)$$
$$\lambda'_2 - \lambda_2 = \frac{h}{m_1c}(1-\cos\theta).$$

2. Désintégration

Invariant associé à la loi de conservation :

$$p_{2\mu}p_2^\mu = p_{a\mu}p_a^\mu - 2p_{a\mu}p_1^\mu + p_{1\mu}p_1^\mu$$

soit $m_2^2c^2 = m_a^2c^2 - 2E_aE_1/c^2 + m_1^2c^2$, d'où

$$E_1 = \frac{m_a^2c^2 + m_1^2c^2 - m_2^2c^2}{2m_a}$$
$$E_2 = \frac{m_a^2c^2 - m_1^2c^2 + m_2^2c^2}{2m_a}$$

Application à $\Lambda^0 \longrightarrow p + \pi^-$:
$E_p = 0.943$ GeV
$E_{\pi^-} = 0.173$ GeV.

3. Décalage spectral gravitationnel

$\mathrm{d}\tau^2 = \mathrm{d}t^2(1 - 2GM/rc^2)$, soit

$$\frac{1}{\nu_r} \simeq \frac{1}{\nu_0}(1 - GM/rc^2).$$

Variation relative de fréquence :

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \left|\frac{\nu_r - \nu_0}{\nu_0}\right| = \frac{GM}{rc^2}.$$

$\nu_0 = 4.565\ 10^{14}$Hz, $\lambda_0 = 6571$ Å
$\nu_r \simeq 1.49\ 10^{15}$Hz, $\lambda_r \simeq 2000$ Å, non visible.

4. Charge en mouvement arbitraire

Dans le référentiel où la charge est instantanément au repos on a

$$\frac{\phi(\mathbf{x}, t)}{c} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R(t_0)}$$

avec $R(t_0) = c(t - t_0)$. On a donc

$$A^\mu(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c} \frac{b^\mu(t_0)}{b_\sigma(t_0) R^\sigma(t_0)}$$

avec $b_\sigma(t_0)R^\sigma(t_0) = b^0(t_0)c(t - t_0) - \mathbf{b}(t_0)\mathbf{R}(t_0)$, ce qui exige que $b^\mu = v^\mu$ pour que lapartie spatiale disparaisse dans le référentiel propre (c'est-à-dire quand $\mathbf{v} = 0$) et pour que la partie temporelle y redonne bien le potentiel scalaire précédent. On a donc

$$A^\mu(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c} \frac{v^\mu(t_0)}{v_\sigma(t_0) R^\sigma(t_0)}$$

qui se transforme par définition comme un quadrivecteur contravariant, et d'où l'on déduit le potentiel vecteur dans le référentiel de l'observateur,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{v}(t_0)}{|\mathbf{R}(t_0)| - \mathbf{v}(t_0)\mathbf{R}(t_0)/c}.$$

5. Mouvement dans des champs électrique et magnétique parallèles

On a

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & E/c \\ 0 & 0 & -B & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \\ -E/c & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où l'équation du mouvement

$$m\frac{\mathrm{d}v_\mu}{\mathrm{d}\tau} = q(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)v^\nu = qF_{\mu\nu}v^\nu$$

qui donne ici

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\begin{pmatrix} v^0 \\ -v^1 \\ -v^2 \\ -v^3 \end{pmatrix} = q\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & E/c \\ 0 & 0 & -B & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \\ -E/c & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}.$$

Avec la contrainte

$$v_\mu(0)v^\mu(0) = \frac{\mathrm{d}x_\mu(0)}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\mu(0)}{\mathrm{d}\tau} = c^2 = [v^0(0)]^2 - u^2,$$

soit $v^0(0) = \sqrt{c^2+u^2}$. On découple les équations

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\begin{pmatrix} v^0 \\ v^3 \end{pmatrix} = \frac{q}{m}\begin{pmatrix} 0 & E/c \\ -E/c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^0 \\ v^3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\begin{pmatrix} -v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \frac{q}{m}\begin{pmatrix} 0 & -B \\ B & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$v^0(\tau) = \sqrt{c^2+u^2}\cosh\left(\frac{qE\tau}{mc}\right) + B_0\sinh\left(\frac{qE\tau}{mc}\right),$$

$$v^3(\tau) = B_3\sinh\left(\frac{qE\tau}{mc}\right),$$

$$v^1(\tau) = u\cos\left(\frac{qB\tau}{m}\right) + B_1\sin\left(\frac{qB\tau}{m}\right),$$

$$v^2(\tau) = B_2\sin\left(\frac{qB\tau}{m}\right).$$

On impose ensuite à tout instant la norme de $v^\mu(\tau)$, soit $v_\mu(\tau)v^\mu(\tau) = c^2$, ce qui permet d'obtenir les constantes

$$v^0(\tau) = \sqrt{c^2+u^2}\cosh\left(\frac{qE\tau}{mc}\right)$$

$$v^3(\tau) = \sqrt{c^2+u^2}\sinh\left(\frac{qE\tau}{mc}\right),$$

$$v^1(\tau) = u\cos\left(\frac{qB\tau}{m}\right),$$

$$v^2(\tau) = u\sin\left(\frac{qB\tau}{m}\right).$$