Correction examen septembre 2001

1. Transformation de l'angle solide

Dans le référentiel propre de la source, $x^* = ct^* \cos\theta^*$ et $z^* = ct^* \sin\theta^*$. La transformation de Lorentz donne

$$\begin{aligned} ct^* &= \gamma(ct - \beta ct \cos\theta) \\ ct^* \cos\theta^* &= \gamma(ct\cos\theta - \beta ct) \\ ct^* \sin\theta^* &= ct \sin\theta. \end{aligned}$$

Les deux premières conduisent à

$$\cos\theta^* = \frac{\cos\theta - \beta}{1 - \beta\cos\theta}.$$

Avec les notations de l'énoncé, la transformation des composantes ω^*/c et k_x^* du quadri-vecteur d'onde s'écrit

$$\begin{aligned} \omega^*/c &= \gamma(\omega/c - \beta(\omega/c)\cos\theta) \\ (\omega^*/c)\cos\theta^* &= \gamma((\omega/c)\cos\theta - \beta\omega/c). \end{aligned}$$

Par élimination de $\gamma\omega/c$ on retrouve l'expression ci-dessus.
On utilise ensuite le fait que $\mathrm{d}N/N_0$ est une quantité scalaire (donc invariante de Lorentz) pour exprimer

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}N}{N_0} = \frac{\mathrm{d}\Omega^*}{4\pi} &= \frac{1}{2}\sin\theta^*\mathrm{d}\theta^* = -\frac{1}{2}\mathrm{d}\cos\theta^* \\ &= \frac{1}{2}\frac{1-\beta^2}{(1-\beta\cos\theta)^2}\sin\theta\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

soit

$$f(\theta) = \frac{1-\beta^2}{(1-\beta\cos\theta)^2}.$$

Dans le cas $\beta = 1/2$, le nombre de photons émis dans un cône d'angle au centre $\pi/3$ vaut

$$\begin{aligned} N(\pi/3) &= \frac{1}{2}N_0\int_0^{\pi/3}\frac{3/4}{(1-(\cos\theta)/2)^2}\sin\theta\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{3}{4}N_0\int_{1/2}^{3/4}\frac{\mathrm{d}u}{u^2} \\ &= \frac{1}{2}N_0. \end{aligned}$$

2. Désintégration en vol

Dans le référentiel propre du méson π^0 on a $p^\mu_{\pi^0} = (E^*_{\pi^0}/c, \mathbf{0})$, $p^\mu_1 = (E^*_\gamma/c, \mathbf{p}^*_\gamma)$ et $p^\mu_2 = (E^*_\gamma/c, -\mathbf{p}^*_\gamma)$. La conservation s'écrit par exemple $p^\mu_1 = p^\mu_{\pi^0} - p^\mu_2$ dont le carré invariant donne

$$0 = m^2_{\pi^0} c^2 + 0 - 2E^*_{\pi^0} E^*_\gamma / c^2.$$

Avec $E^*_{\pi^0} = m_{\pi^0} c^2$ et $E^*_\gamma = p^*_\gamma c$ il vient

$$E^*_\gamma = \frac{1}{2} m_{\pi^0} c^2, \qquad p^*_\gamma = \frac{1}{2} m_{\pi^0} c.$$

La transformation de Lorentz de l'énergie du photon 1, du référentiel propre du méson incident au référentiel laboratoire, s'écrit

$$\begin{aligned} E_\gamma / c &= \gamma (E^*_\gamma / c + \beta p^*_\gamma \cos\theta^*) \\ &= \frac{1}{2} \gamma (1 + \beta \cos\theta^*) m_{\pi^0} c, \end{aligned}$$

d'où les valeurs extrêmes :

$$E_{min} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} m_{\pi^0} c^2$$

$$E_{max} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} m_{\pi^0} c^2.$$

Si l'on combine les transformations inverses de l'énergie et de la première composante de l'impulsion,

$$\begin{aligned} E^*_\gamma / c &= \gamma (E_\gamma / c - \beta p_\gamma \cos\theta) \\ p^*_\gamma \cos\theta^* &= \gamma (p_\gamma \cos\theta - \beta E_\gamma / c), \end{aligned}$$

avec $E_\gamma = p_\gamma c$ vrai dans tout référentiel, on obtient

$$p^*_\gamma \cos\theta^* = \gamma \cos\theta^* (p_\gamma - \beta p_\gamma \cos\theta),$$

soit

$$\cos\theta^* = \frac{\cos\theta - \beta}{1 - \beta\cos\theta}.$$

La distribution angulaire

$$f(\theta) = \frac{1-\beta^2}{(1-\beta\cos\theta)^2}$$

se déduit du même raisonnement qu'à l'exercice précédent. On en déduit également

$$E_\gamma = \frac{1}{2} \gamma (1 + \beta f(\theta)) m_{\pi^0} c^2 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta} m_{\pi^0} c^2.$$

Des valeurs extrêmes on déduit

$$
\begin{aligned}
m_{\pi^0}c^2 &= 2\sqrt{E_{min}E_{max}},\\
\frac{\Delta m_{\pi^0}c^2}{m_{\pi^0}c^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta E_{min}}{E_{min}} + \frac{\Delta E_{max}}{E_{max}}\right),\\
E_{max} - E_{min} &= m_{\pi^0}c^2\gamma\beta,\\
E_{max} + E_{min} &= m_{\pi^0}c^2\gamma,\\
\beta &= \frac{E_{max} - E_{min}}{E_{max} + E_{min}}
\end{aligned}
$$

ce qui donne les applications numériques

$$
m_{\pi^0}c^2 = (135.5 \pm 2.0)\ \text{MeV}, \quad \beta = 0.223 \pm 0.014.
$$

3. Rayonnement Cerenkov

La réaction de matérialisation d'un photon partir d'un éléctron (ou de toute autre particule sans structure interne) est impossible, car dans le référentiel propre de l'électron initial, le carré invariant de la relation de conservation $p_\gamma^\mu = p_e^\mu - {p'}_e^\mu$ donnerait

$$
0 = 2mc^2 - 2E_e {E'}_e/c^2,
$$

ce qui est impossible avec $E_e = \sqrt{p_e^2c^2 + m^2c^4}$ et ${E'}_e = \sqrt{{p'}_e^2c^2 + m^2c^4}$. On voit qu'il faudrait que $p_{\gamma\mu}p_\gamma^\mu$ soit négatif (c'est-à-dire une masse négative) pour que la réaction soit permise.
Dans le référentiel laboratoire on pose

$$
\begin{aligned}
p_e^\mu &= (E_e/c, \mathbf{p}_e) = (E_e/c, p_e, 0, 0),\\
{p'}_e^\mu &= ({E'}_e/c, p'_e\cos\theta, -p'_e\sin\theta, 0),\\
p_\gamma^\mu &= (E_\gamma/c, nE_\gamma\cos\varphi/c, nE_\gamma\sin\varphi/c, 0),
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire que les angles d'éjection du photon et de l'électron final sont de φ et θ par rapport à la vitesse de l'électron incident. On note également que de la dernière relation il découle que le photon dans le milieu matériel est assimilable à une particule effective de masse négative !
On écrit la conservation de l'impulsion-énergie sous la forme ${p'}_e^\mu = p_e^\mu - p_\gamma^\mu$ dont le carré invariant produit la relation

$$
m^2c^2 = m^2c^2 - 2E_eE_\gamma/c^2 + 2\mathbf{p}_e\mathbf{p}_\gamma + (1 - n^2)E_\gamma^2/c^2.
$$

On en déduit immédiatement

$$
\cos\varphi = \frac{E_\gamma(n^2 - 1) + 2E_e}{2p_enc}.
$$

Le photon doit emporter une certaine énergie E_γ. Dans le cas limite où celle-ci serait idéalement nulle, on aurait

$$\cos\varphi = E_e/p_e nc$$

ce qui implique que $E_e < p_e nc$. De plus, avec $\mathbf{p}_e = \gamma m \mathbf{v}$ et $E_e = \gamma mc^2$, il vient

$$c^2|\mathbf{p}_e|/E_e = |\mathbf{v}|,$$

l'inégalité précédente devient

$$|\mathbf{v}| > c/n,$$

c'est-à-dire que l'électron doit initialement avoir une vitesse plus importante que celle de la lumière dans le milieu pour que l'émission Cerenkov d'un photon puisse avoir lieu.
On peut encore exprimer l'énergie de l'électron en fonction de sa vitesse, $E_e = \gamma mc^2$, soit, avec $|\mathbf{v}| > c/n$ ou $\gamma > n/\sqrt{n^2-1}$, on voit que l'énergie de l'électron doit initialement être au moins égale à

$$E_{min} = \frac{n}{\sqrt{n^2-1}} mc^2$$

pour permettre l'émission Cerenkov.
L'énergie E_e étant supérieure à E_{min}, on a

$$E_\gamma = \frac{2}{n^2-1}(p_e nc\cos\varphi - E_e)$$

qui prend au maximum la valeur

$$E_{\gamma\ max} = \frac{2}{n^2-1}(p_e nc - E_e) = \frac{2}{n^2-1}(n\sqrt{E_e^2 - m^2c^4} - E_e).$$

Si la particule incidente possède une structure interne, la conservation de l'impulsion-énergie peut être assurée dans le vide grâce à une transition interne (changement de l'état d'énergie interne de la particule).