Correction examen juin 2002

1. Emission-absorption de photons par des atomes et noyaux

Lors de l'émission, l'atome (p^μ) est initialement dans l'état excité ($p_\mu p^\mu = m_1^2c^2$), et il émet un photon ($p_{\text{ém.}\mu}p^\mu_{\text{ém.}} = 0$) pour se retrouver dans l'état fondamental ($p'_\mu p'^\mu = m_0^2c^2$). La loi de conservation $p_\mu = p'_\mu + p_{\text{ém.}\mu}$ s'écrit aussi $p'_\mu = p_\mu - p_{\text{ém.}\mu}$ et le carré invariant associé donne

$$m_0^2c^2 = m_1^2c^2 + 0 - 2m_1c \times h\nu_{\text{ém.}}/c,$$

soit

$$h\nu_{\text{ém.}} = (m_1 - m_0)c^2\frac{m_1+m_0}{2m_1} = \frac{1}{2}h\nu_0(1 + m_0/m_1).$$

Lors de l'absorption, le calcul est analogue. La loi de conservation s'écrit cette fois $p'_\mu = p_\mu + p_{\text{abs.}\mu}$ et l'invariant correspondant donne

$$m_1^2c^2 = m_0^2c^2 + 0 + 2m_0c \times h\nu_{\text{abs.}}/c,$$

soit

$$h\nu_{\text{abs.}} = (m_1 - m_0)c^2\frac{m_1+m_0}{2m_0} = \frac{1}{2}h\nu_0(1 + m_1/m_0).$$

La variation entre fréquences d'émission et d'absorption vaut

$$\Delta\nu = |\nu_{\text{abs.}} - \nu_{\text{ém.}}| = \frac{1}{2}\nu_0\left|\frac{m_1}{m_0} - \frac{m_0}{m_1}\right|,$$

soit en variation relative

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{1}{2}\frac{m_1^2 - m_0^2}{m_0m_1} \simeq \frac{h\nu_0}{mc^2}.$$

Pour des transitions atomiques, cette variation relative est très faible, alors qu'elle prend des valeurs notables dans le cas des transitions nucléaires.

2. Transformation des champs E et B

Dans le référentiel $\mathcal{R}$, le champ magnétique vaut

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0|\mathbf{j}|S}{2\pi r}\mathbf{u}_\varphi = \frac{\mu_0 n|q_e||\mathbf{v}|S}{2\pi r}\mathbf{u}_\varphi$$

ce qui donne lieu à une force de Lorentz sur la charge q en mouvement,

$$\mathbf{F} = q|\mathbf{v}|(-\mathbf{u}_z) \wedge \mathbf{B} = \frac{\mu_0 n |q_e|^2 |\mathbf{v}|^2 S}{2\pi r}\mathbf{u}_r.$$

Dans $\mathcal{R}'$, la charge q est maintenant immobile. Pour qu'une force s'exerce sur elle, il faut donc nécessairement qu'il existe un champ électrique dans $\mathcal{R}'$. Le quadri-courant $j^\mu = (\rho c, \mathbf{j}) = (\rho c, j, 0, 0)$ se transforme par transformation de Lorentz suivant

$$\begin{pmatrix} \rho' c \\ j' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho c \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\rho c \\ -\beta\gamma j \end{pmatrix}$$

La densité de charge associée aux ions, ρ_+, se transforme alors suivant $\rho'_+ = \gamma\rho_+$, alors que pour les électrons on a la transformation inverse (c'est dans $\mathcal{R}'$ que les électrons sont au repos), $\rho'_- = \gamma^{-1}\rho_-$. Dans le référentiel en mouvement, le conducteur apparaît donc chargé, $\rho' = \rho'_+ + \rho'_- = \beta^2\gamma n|q_e|$. Cela génère un champ électrique (les longueurs transverses, telles que r ici, sont inchangées) tel que $2\pi r E' = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho' S$, soit

$$\mathbf{E}' = \frac{(|\mathbf{v}|^2/c^2)\gamma n |q_e| S \mu_0 c^2}{2\pi r}\mathbf{u}_r$$

d'où résulte la force

$$\mathbf{F}' = \gamma \frac{\mu_0 n |q_e|^2 |\mathbf{v}|^2 S}{2\pi r}\mathbf{u}_r.$$

Le champ magnétique est donné par

$$\mathbf{B}' = \frac{\mu_0 |\mathbf{j}'| S}{2\pi r}\mathbf{u}_\varphi = \beta\gamma \frac{\mu_0 n |q_e| |\mathbf{v}| S}{2\pi r}\mathbf{u}_\varphi.$$

On constate que ces expressions sont conformes aux lois de transformation des champs et qu'elles imposent de plus que $F' = \gamma F$ c'est-à-dire que $\mathbf{F}$ se transforme comme un quadri-vecteur.

3. Equations d'Euler-Lagrange covariantes

Partant de l'action

$$S = \int \mathcal{L} \mathrm{d}x^\mu = \int L \mathrm{d}t,$$

où $L = \mathcal{L}\mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}t$, (on pose ici $\dot{x}^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}$), les équations d'Euler-Lagrange prennent la forme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0.$$

Dans le cas d'une charge q, de masse m, en présence d'un champ électromagnétique, l'action prend la forme

$$S = \int \left(-m v_\mu \mathrm{d}x^\mu - q A_\mu \mathrm{d}x^\mu\right).$$

Le premier terme est la généralisation relativiste de l'action de la particule libre classique,

$$S = \int \frac{1}{2} m\mathbf{v} \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t$$

(le changement de signe provient de la métrique dans l'espace de Minkowski). Le second terme est l'expression invariante de Lorentz que l'on peut former de manière évidente à partir des caractéristiques du champ électromagnétique, A^μ et de la trajectoire de la particule, x^μ. Les constantes multiplicatives sont adaptées pour retrouver la limite classique.
Si l'on modifie le quadripotentiel par la transformation (appelée transformation de jauge)

$$A_\mu \to A'_\mu + \partial_\mu \chi,$$

l'action devient

$$\begin{aligned} S \to S'_q &= \int_a^b (-mc(\mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x^\mu)^{1/2} - qA_\mu \mathrm{d}x^\mu - q\partial_\mu \chi \mathrm{d}x^\mu) \\ &= S - q\int_a^b \frac{\partial \chi}{\partial x^\mu} \mathrm{d}x^\mu \\ &= S - q\int_a^b \mathrm{d}\chi \\ &= S - q(\chi(b) - \chi(a)) \end{aligned}$$

et ne varie que d'une quantité globale indépendante du chemin suivi entre a et b. La minimisation de S' est donc équivalente à celle de S et la physique est invariante par changement de jauge. En notation tridimensionnelle, ce changement de jauge s'écrit

$$A'_\mu = (\phi'/c, -\mathbf{A}') = (\phi/c, -\mathbf{A}) + \left(\frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t}, \vec{\nabla}\chi\right)$$

soit

$$\begin{aligned} \phi \to \phi' &= \phi + \frac{\partial \chi}{\partial t} \\ \mathbf{A} \to \mathbf{A}' &= \mathbf{A} - \vec{\nabla}\chi. \end{aligned}$$

Le lagrangien est donné par

$$L = (-mv_\mu - qA_\mu)\dot{x}^\mu.$$

On en déduit l'impulsion covariante,

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = -mv_\mu - qA_\mu.$$

Cette expression conduite aux relations entre composantes connues,

$$p_\mu = (E/c, -\mathbf{p}) = -m(\gamma c, -\gamma \mathbf{v}) - q(\phi/c, -\mathbf{A}).$$

L'équation d'Euler-Lagrange peut s'écrire

$$\dot{p}_\mu = \frac{\partial L}{\partial x^\mu},$$

où $\dot{p}_\mu = -m\dot{v}_\mu - q\dot{A}_\mu$ s'exprime encore plus explicitement en notant que $\mathrm{d}A_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\mathrm{d}x^\nu$, soit $\dot{A}_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\dot{x}^\nu$ et finalement

$$\dot{p}_\mu = -m\dot{v}_\mu - q\partial_\nu A_\mu \dot{x}^\nu.$$

Au second membre il vient

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = -q\partial_\mu A_\nu \dot{x}^\nu,$$

en mettant à profit un changement d'indice $\mu \to \nu$ dans la contraction, effectuée sur un indice muet, du dernier terme de L. L'équation du mouvement devient immédiatement

$$m\dot{v}_\mu = -q\partial_\nu A_\mu \dot{x}^\nu + \partial_\mu A_\nu \dot{x}^\nu = -qF_{\nu\mu}\dot{x}^\nu = qF_{\mu\nu}\dot{x}^\nu.$$

On a mis à profit l'antisymétrie du tenseur champ électromagnétique dans le dernier terme.