**UNIVERSITÉ HENRI POINCARÉ**
**FACULTÉ DES SCIENCES**

DIPLÔME : Licence de Physique
Epreuve de : UE 4 - Relativité
Examen final
Date : 20 janvier 2003
Horaire : 9h00-11h00

SUJET D'EXAMEN :
Rédacteurs : B. Berche et A. Schuhl
Formulaire joint au sujet
Calculatrices autorisées
Durée : 2h00

**Veuillez respecter les notations de l'énoncé et effectuer toutes les applications numériques. La dernière question est importante.**

## 1. Mesure de la masse du neutrino

On se propose dans cet exercice de montrer comment des mesures de quantité de mouvement lors d'une expérience de désintégration peuvent donner accès à la masse du neutrino.

On considère une particule 1, de quadri-impulsion $p^\mu = (e/c, \mathbf{p})$ (attention à la notation $e$ pour l'énergie de la particule 1), qui se désintègre en deux particules 2 et 3, de quadri-impulsions $P^\mu = (E/c, \mathbf{P})$ et $Q^\mu = (F/c, \mathbf{Q})$ (attention à la notation $F$ pour l'énergie de la particule 3). Les particules 2 et 3 ont des masses $m_2$ et $m_3$. On étudie la désintégration à angle nul de la particule 1, c'est-à-dire lorsque $\cos\theta_{12} = 1$ (problème unidimensionnel),

| Etat initial | Etat | final |
|---|---|---|
| méson $\pi$, $m_1$ | neutrino, $m_3$ | muon, $m_2$ |
| $\longrightarrow$ | $\longleftarrow$ | $\longrightarrow$ |
| $p^\mu = (e/c, \mathbf{p})$ | $Q^\mu = (F/c, \mathbf{Q})$ | $P^\mu = (E/c, \mathbf{P})$ |

On note $Ox$ l'axe de la vitesse du méson $\pi$ et $\mathbf{v}$ cette vitesse mesurée dans le référentiel du laboratoire.

1. Exprimer l'invariant $m_2^2c^2$ en fonction des invariants $m_1^2c^2$ et $m_3^2c^2$ et des impulsions et énergies $|\mathbf{p}|$, $|\mathbf{Q}|$, $e$ et $F$.
2. Exprimer de manière symétrique l'invariant $m_3^2c^2$.
3. On suppose que la particule 3 est un neutrino, de masse supposée nulle dans un premier temps. Il est accompagné d'un muon (la particule 2) dans la désintégration d'un méson $\pi$ (la particule 1). On donne $m_\pi = 140$ MeV$/c^2$ et $m_\mu = 106$ MeV$/c^2$. On se place dans le référentiel propre du méson $\mathcal{R}^*$ où toutes les grandeurs sont étoilées, par exemple $|\mathbf{Q}^*|$. Comment se simplifient les relations ci-dessus ? En déduire les expressions de $E^*$, $F^*$ et $|\mathbf{Q}^*|$ (A.N.).
4. On travaille maintenant dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}_L$.
   4.a Le méson $\pi$ a une quantité de mouvement de 350 MeV$/c$, mesurée dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}_L$. En déduire son énergie $e$ et les constantes cinématiques $\gamma = e/mc^2$ et $\beta = |\mathbf{p}|c/e$ (effectuer les applications numériques).
   4.b Quelle sont, dans le référentiel du laboratoire, la quantité de mouvement du muon et son énergie (avec A.N.) ?
5. On suppose maintenant que le neutrino possède une faible masse.
   5.a Calculer son énergie et sa quantité de mouvement dans $\mathcal{R}^*$, puis sa quantité de mouvement dans $\mathcal{R}_L$, $|\mathbf{Q}|$.

5.b Sachant que cette dernière (qui est obtenue expérimentalement par la différence $|\mathbf{p}| - |\mathbf{P}|$) est connue avec une incertitude de 15 keV/$c$ (c'est-à-dire que $\delta|\mathbf{Q}| = 15$ keV/$c$), déterminer l'ordre de grandeur du carré de la masse maximale $m_3^2$ du neutrino. On calculera pour cela

$$\left.\frac{\partial|\mathbf{Q}|}{\partial m_3^2}\right|_{m_3=0}, \text{ puis } \quad \delta m_3^2 \text{ en fonction de } \delta|\mathbf{Q}|.$$

Pour cette dernière question, il est préférable de calculer la quantité sans dimensions $\frac{m_1}{c}\left.\frac{\partial|\mathbf{Q}|}{\partial m_3^2}\right|_{m_3=0}$ pour effectuer l'application numérique, puis d'estimer $\delta m_3^2$ en unités du système international, pour en déduire $\delta m_3$ en kg puis en eV/$c^2$. La valeur de $\delta m_3$ représente combien par rapport à la masse de l'électron (511 keV/$c^2$) ?

## 2. Formulaire

Quadrivecteurs contravariants :

$$A^\mu = (A^0, A^i) = (A^0, \mathbf{A}), \quad \mu = 0, \ldots, 3, \quad i = 1, \ldots, 3,$$

tel que par transformation de Lorentz entre deux référentiels inertiels ($\mathcal{R}'$ en translation uniforme par rapport à $\mathcal{R}$ à vitesse $\beta c$ suivant l'axe 1) on ait ($\vec{\beta} = \mathbf{v}/c$, $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$)

$$A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu, \qquad [\Lambda^\mu{}_\nu] = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quadrivecteur covariant et contraction invariante :

$$A_\mu = (A_0, A_i) = (A^0, -A^i).$$

$$A_\mu A^\mu = (A^0)^2 - \mathbf{A}^2.$$

Métrique de Minkowski :

$$\mathrm{d}x^\mu = (c\mathrm{d}t, \mathrm{d}\mathbf{r}), \quad \mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x^\mu = c^2\mathrm{d}\tau^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\mathbf{r}^2.$$

Tenseur métrique : $g_{\mu\nu}$ tel que

$$\mathrm{d}x_\mu = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\nu.$$

Tenseur métrique de Minkowski en cartésiennes :

$$\mathrm{d}x^\mu = (c\mathrm{d}t, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z), \quad [g_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quadri-vitesse, quadri-accélération :

$$v^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = (\gamma c, \gamma\mathbf{v}), \quad \mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}, \quad a^\mu = \frac{\mathrm{d}v^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2}.$$

Quadri-impulsion :

$$p^\mu = mv^\mu = (E/c, \mathbf{p}) = (\gamma mc, \gamma m\mathbf{v}),$$

$$p_\mu p^\mu = E^2/c^2 - \mathbf{p}^2 = m^2c^2.$$