Correction examen janvier 2003

1. Mesure de la masse du neutrino

1. De $p^\mu = P^\mu + Q^\mu$ on déduit $P^\mu = p^\mu - Q^\mu$ dont on forme le carré invariant,

$$P_\mu P^\mu = p_\mu p^\mu + Q_\mu Q^\mu - 2p_\mu Q^\mu$$

soit encore

$$m_2^2c^2 = m_1^2c^2 + m_3^2c^2 - 2(eF/c^2 + |\mathbf{p}|.|\mathbf{Q}|).$$

2. Par symétrie on obtient de même

$$m_3^2c^2 = m_1^2c^2 + m_2^2c^2 - 2(eE/c^2 - |\mathbf{p}|.|\mathbf{P}|).$$

3. On se place dans $\mathcal{R}^*$. Deux simplifications apparaissent, $\mathbf{p}^* = 0$ et $e^{*2}/c^2 - |\mathbf{p}^*|^2 = m_1^2c^2$, soit $e^* = m_1c^2$. De plus $m_3 = 0$.

3.a Il vient

$$m_2^2c^2 = m_1^2c^2 - 2e^*F^*/c^2,$$
$$0 = m_1^2c^2 + m_2^2c^2 - 2e^*E^*/c^2,$$

En utilisant la valeur de e^* on a donc

$$E^* = \frac{m_1^2c^2 + m_2^2c^2}{2m_1} = 110.129 \text{ MeV},$$
$$F^* = \frac{m_1^2c^2 - m_2^2c^2}{2m_1} = 29.871 \text{ MeV}.$$

De plus $F^{*2}/c^2 - |\mathbf{Q}^*|^2 = 0$, soit $|\mathbf{Q}^*| = F^*/c = 29.871$ MeV/c.

3.b On utilise l'invariant $e^2/c^2 - |\mathbf{p}|^2 = m_1^2c^2$ dans $\mathcal{R}_L$, soit

$$e = \sqrt{|\mathbf{p}|^2c^2 + m_1^2c^4} = 376.962 \text{ MeV}.$$

Les constantes cinématiques s'en déduisent,

$$\gamma = e/m_1c^2 = 2.693, \quad \beta = |\mathbf{p}|c/e = 0.928.$$

3.c Dans le référentiel du laboratoire (se déplaçant à vitesse $-\mathbf{v}$ par rapport à $\mathcal{R}^*$, $\mathbf{v}$ est la vitesse (portée par l'axe Ox) du méson π mesurée dans $\mathcal{R}_L$), on a

$$|\mathbf{P}| = \gamma(|\mathbf{P}^*| + \beta E^*/c), \qquad |\mathbf{P}^*| = |\mathbf{Q}^*|,$$

d'où

$$|\mathbf{P}| = \frac{e}{m_1c^2}\left(|\mathbf{P}^*| + \frac{|\mathbf{p}|c}{e}\frac{E^*}{c}\right) = 355.666 \text{ MeV}/c$$

$$E = \sqrt{|\mathbf{P}|^2c^2 + m_2^2c^4} = 371.126 \text{ MeV}.$$

4. Le neutrino a maintenant une faible masse, $m_3 \neq 0$. On a donc

$$m_2^2c^2 = m_1^2c^2 + m_3^2c^2 - 2e^*F^*/c^2,$$

En utilisant toujours la valeur de $e^* = m_1c^2$ on a donc

$$\begin{aligned} F^* &= \frac{m_1^2c^2 + m_3^2c^2 - m_2^2c^2}{2m_1} \\ &= [|\mathbf{Q}^*|^2c^2 + m_3^2c^4]^{1/2}. \end{aligned}$$

4.a On a donc

$$|\mathbf{Q}^*| = [(F^*)^2/c^2 - m_3^2c^2]^{1/2},$$

et $Q_x^* = -|\mathbf{Q}^*|$, soit dans le référentiel du laboratoire,

$$\begin{aligned} Q_x &= \gamma(Q_x^* + \beta F^*/c) \\ &= \gamma\beta F^*/c - \gamma[(F^*)^2/c^2 - m_3^2c^2]^{1/2}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial m_3^2} &= \frac{\gamma\beta}{c}\left.\frac{\partial F^*}{\partial m_3^2}\right|_{m_3=0} \\ &\quad - \frac{1}{2}\gamma[F^*(m_3=0)/c]^{-1}\left(\frac{1}{c^2}\left.\frac{\partial (F^*)^2}{\partial m_3^2}\right|_{m_3=0} - c^2\right). \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} F^*(m_3=0) &= \frac{m_1^2c^2 - m_2^2c^2}{2m_1} \\ \left.\frac{\partial F^*}{\partial m_3^2}\right|_{m_3=0} &= \frac{c^2}{2m_1} \\ \left.\frac{\partial (F^*)^2}{\partial m_3^2}\right|_{m_3=0} &= \left(2F^*\frac{\partial F^*}{\partial m_3^2}\right)_{m_3=0} \\ &= \frac{m_1^2c^4 - m_2^2c^4}{2m_1^2}, \end{aligned}$$

de sorte qu'il vient

$$\frac{\partial |\mathbf{Q}|}{\partial m_3^2} = \frac{\gamma(1-\beta)c}{2m_1} + \gamma c\frac{m_1c^2}{m_1^2c^2 - m_2^2c^2}$$

ou sans dimension

$$\frac{m_1}{c}\frac{\partial |\mathbf{Q}|}{\partial m_3^2} = \frac{\gamma(1-\beta)}{2} + \gamma\frac{m_1^2c^2}{m_1^2c^2 - m_2^2c^2} = 6.408$$

On a donc

$$\begin{aligned} \delta m_3^2 = \frac{m_1}{c}\delta|\mathbf{Q}| &= \frac{140 \times 1.6 \times 10^{-13}}{9.10^{16}} \times \frac{1}{3.10^8} \times \frac{15 \times 1.6\ 10^{-16}}{9.10^{16}} \times \frac{1}{6.408} \\ &= 3.452 \times 10^{-69}\text{kg}^2. \end{aligned}$$

On a donc $\delta m_3 = 5.876 \times 10^{-35}$kg qui représente 33 eV$/c^2$ ou encore 6.5×10^{-5} fois la masse de l'électron.