Correction examen janvier 2003

1. Moment cinétique

1. De $\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$ on déduit par exemple $L_x = yp_z - zp_y$ que l'on généralise au tenseur antisymétrique

$$L^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu.$$

Il y a donc $(16-4)/2 = 6$ composantes indépendantes, $L^{0i} = x^0 p^i - x^i p^0 = ctp^i - x^i E/c$, $L^{ij} = x^i p^j - x^j p^i$, soit

$$[L^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 0 & ctp_x - xE/c & ctp_y - yE/c & ctp_z - zE/c \\ -(ctp_x - xE/c) & 0 & xp_y - yp_x & xp_z - zp_x \\ -(ctp_y - yE/c) & yp_x - xp_y & 0 & yp_z - zp_y \\ -(ctp_z - zE/c) & zp_x - xp_z & zp_y - yp_z & 0 \end{pmatrix}.$$

2. On a directement

$$\frac{\mathrm{d}L^{\mu\nu}}{\mathrm{d}\tau} = m\underbrace{(v^\mu v^\nu - v^\nu v^\mu)}_{0} + \underbrace{x^\mu \frac{\mathrm{d}p^\nu}{\mathrm{d}\tau} - x^\nu \frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau}}_{x^\mu\Phi^\nu - x^\nu\Phi^\mu} = M^{\mu\nu}$$

où l'on a donc posé $M^{\mu\nu} = x^\mu\Phi^\nu - x^\nu\Phi^\mu$. L'équation ci-dessus généralise la dynamique du moment cinétique et la partie spatiale notamment correspond au théorème du moment cinétique avec l'introduction du moment de la résultante des forces :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p}.$$

3. Le calcul de l'invariant donne directement $-\frac{1}{2}L_{\mu\nu}L^{\mu\nu} = |ct\mathbf{p} - \frac{E}{c}\mathbf{r}|^2 - |\mathbf{L}|^2$ qui est une quantité indépendante du référentiel. Notamment dans le référentiel propre où $\mathbf{L}$ s'annule, on obtient $ct\mathbf{p} - \frac{E}{c}\mathbf{r}$ dont la signification est donnée à la question suivante.

4. La conservation des composantes L^{0i} donne $\gamma mct\mathbf{v} - \gamma mc\mathbf{r} = \mathbf{const}$, soit

$$\mathbf{r} = \mathbf{const} + \mathbf{v}t$$

c'est-à-dire la théorème du centre de masse qui se déplace en mouvement rectiligne et uniforme dans le cas d'un système isolé.

2. Charge en mouvement uniforme

1. Dans le référentiel propre on a

$$E'_x(M_x) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x'^2}, \quad E'_y(M_x) = 0$$

$$E'_x(M_y) = 0, \quad E'_y(M_y) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{y'^2}.$$

2. Dans $\mathcal{R}$, on

$$E_x(M_x) = E'_x(M_x) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\gamma^2 x^2}, \quad E'_y(M_x) = \gamma E'_y(M_x) = 0$$

$$E_x(M_y) = E'_x(M_y) = 0, \quad E_y(M_y) = \gamma E'_y(M_y) = \gamma\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{y^2}.$$

C'est dans la direction transverse au mouvement que le champ est le plus intense, et dans un rapport γ^3. Le champ magnétique découle directement de

$$\mathbf{B}_\parallel = \mathbf{B}'_\parallel = 0$$

$$\mathbf{B}_\perp = \frac{1}{c^2}\mathbf{v} \wedge \mathbf{E}_\perp$$

pour annuler le champ magnétique dans le référentiel prope.