Formulaire

Transformation de Lorentz :

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + (\gamma - 1)\frac{(\mathbf{r}\vec{\beta})\vec{\beta}}{\beta^2} - \vec{\beta}\gamma ct,$$

$$ct' = \gamma(ct - \vec{\beta}\mathbf{r}).$$

Rapidité :

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\eta & -\sinh\eta \\ -\sinh\eta & \cosh\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}, \quad \beta = \tanh\eta.$$

Transformation des vitesses :

$$\mathbf{v}'_{\parallel} = \frac{\mathbf{v}_{\parallel} - \vec{\beta}c}{1 - \vec{\beta}\mathbf{v}/c}, \quad \mathbf{v}'_{\perp} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \vec{\beta}\mathbf{v}/c}\mathbf{v}_{\perp}.$$

Calcul k : $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ (en mouvement inertiel à vitesse $\mathbf{v}$ par rapport à $\mathcal{R}$) sont synchronisés à $t = t' = 0$. Un signal émis depuis $\mathcal{R}$ à l'instant T est reçu dans $\mathcal{R}'$ à $T' = kT$ avec

$$k = \sqrt{\frac{1 + |\mathbf{v}|/c}{1 - |\mathbf{v}|/c}}.$$

Quadrivecteurs contravariants :

$$A^\mu = (A^0, A^i) = (A^0, \mathbf{A}), \quad \mu = 0, \ldots, 3, \quad i = 1, \ldots, 3,$$

tel que par transformation de Lorentz entre deux référentiels inertiels ($\mathcal{R}'$ en translation uniforme par rapport à $\mathcal{R}$ à vitesse βc suivant l'axe 1) on ait ($\vec{\beta} = \mathbf{v}/c$, $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$)

$$A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu, \qquad [\Lambda^\mu{}_\nu] = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quadrivecteur covariant :

$$A_\mu = (A_0, A_i) = (A^0, -A^i).$$

Contraction invariante :

$$A_\mu A^\mu = (A^0)^2 - \mathbf{A}^2.$$

Dérivée covariante :

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}).$$

D'Alembertien :

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2.$$

Tenseur deux fois contravariant : $T^{\mu\nu}$ tel que

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\sigma \Lambda^\nu{}_\tau T^{\sigma\tau}.$$

Tenseur deux fois covariant :

$$[T_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} T_{00} & T_{0j} \\ T_{i0} & T_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{00} & -T^{0j} \\ -T^{i0} & T^{ij} \end{pmatrix}.$$

Tenseur mixte :

$$[T^\mu{}_\nu] = \begin{pmatrix} T^0{}_0 & T^0{}_j \\ T^i{}_0 & T^i{}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{00} & -T^{0j} \\ T^{i0} & -T^{ij} \end{pmatrix}.$$

Métrique de Minkowski :

$$\mathrm{d}x^\mu = (c\mathrm{d}t, \mathrm{d}\mathbf{r}), \quad \mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x^\mu = c^2 \mathrm{d}\tau^2 = c^2 \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\mathbf{r}^2.$$

Tenseur métrique : $g_{\mu\nu}$ tel que

$$\mathrm{d}x_\mu = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\nu.$$

Tenseur métrique de Minkowski en cartésiennes ou sphériques :

$$\mathrm{d}x^\mu = (c\mathrm{d}t, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z), \quad [g_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{d}x^\mu = (c\mathrm{d}t, \mathrm{d}r, \mathrm{d}\theta, \mathrm{d}\varphi), \quad [g_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

Quadri-vitesse, quadri-accélération :

$$v^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = (\gamma c, \gamma \mathbf{v}), \quad \mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}, \quad a^\mu = \frac{\mathrm{d}v^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2}.$$

Quadri-impulsion :

$$p^\mu = mv^\mu = (E/c, \mathbf{p}) = (\gamma mc, \gamma m\mathbf{v}),$$
$$p_\mu p^\mu = E^2/c^2 - \mathbf{p}^2 = m^2c^2.$$

Action et lagrangien de la particule libre :

$$S = -mc \int \mathrm{d}s = \int L \mathrm{d}t,$$

$$L = -mc\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}$$

$$\delta S = m \int \frac{\mathrm{d}v_\mu}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau\delta x^\mu = 0, \quad m\frac{\mathrm{d}v_\mu}{\mathrm{d}\tau} = 0.$$

4-courant : $j^\mu = (\rho c, \mathbf{j})$, conservation de la charge

$$\partial_\mu j^\mu = 0.$$

4-potentiel : $A^\mu = (\phi/c, \mathbf{A})$, jauge de Lorenz et équation des ondes

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \quad \partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \mu_0 j^\nu.$$

Action sous champ :

$$S = \int \left(-mc(\mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x^\mu)^{1/2} - qA_\mu \mathrm{d}x^\mu\right),$$

$$\delta S = \int \left[m\frac{\mathrm{d}v_\mu}{\mathrm{d}\tau} - q\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}v^\nu - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}v^\nu\right)\right]\mathrm{d}\tau\delta x^\mu = 0,$$

$$m\frac{\mathrm{d}v_\mu}{\mathrm{d}\tau} = q(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)v^\nu = qF_{\mu\nu}v^\nu.$$

Tenseur champ électromagnétique :

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu}.$$

$$[F^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix},$$

$$[\bar{F}^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z/c & -E_y/c \\ B_y & -E_z/c & 0 & E_x/c \\ B_z & E_y/c & -E_x/c & 0 \end{pmatrix}.$$

Transformation des champs électromagnétiques :

$$\mathbf{E}'_\parallel = \mathbf{E}_\parallel,$$

$$\mathbf{B}'_\parallel = \mathbf{B}_\parallel,$$

$$\mathbf{E}'_\perp = \gamma(\mathbf{E}_\perp + \vec{\beta}c \wedge \mathbf{B}_\perp)$$

$$\mathbf{B}'_\perp = \gamma(\mathbf{B}_\perp - (\vec{\beta}/c) \wedge \mathbf{E}_\perp).$$

Invariants du champ électromagnétique :

$$-\frac{1}{2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \mathbf{E}^2/c^2 - \mathbf{B}^2, \quad -\frac{1}{4}\bar{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \mathbf{E}\cdot\mathbf{B}/c.$$

Equations de Maxwell covariantes :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu, \quad \partial_\mu \bar{F}^{\mu\nu} = 0.$$

Courbure de Gauss, métrique radiale et déviation géodésique :

$$K_G = \frac{1}{2rg_{rr}^2}\frac{\partial g_{rr}}{\partial r}, \quad \frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}s^2} = K_G\xi.$$

Métrique de Schwarzschild ($r_S = 2GM/c^2$) :

$$\mathrm{d}s^2 = c^2 d\tau^2 = c^2(1 - r_S/r)\mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - r_S/r} - r^2\mathrm{d}\theta^2 - r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2.$$

Tenseur métrique de Schwarschild : $\mathrm{d}x^\mu = (c\mathrm{d}t, \mathrm{d}r, \mathrm{d}\theta, \mathrm{d}\varphi)$,

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 1 - r_S/r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1 - r_S/r)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}.$$