PROPRIETES DES DISTRIBUTIONS

Toutes les relations s'entendent $\forall\varphi$

La notation T(x) est incorrecte mais très pratique !!!!

Egalité

$T_1 = T_2$ si $\langle T_1,\varphi\rangle = \langle T_2,\varphi\rangle$

$T = 0$ si $\langle T,\varphi\rangle = 0$

Translation

$\langle T(x-a), \varphi(x)\rangle = \langle T(x), \varphi(x+a)\rangle$

Homothétie

$\langle T\left(\frac{x}{a}\right), \varphi(x)\rangle = |a| \langle T(x), \varphi(ax)\rangle$

Dérivation

$\langle T', \varphi\rangle = - \langle T, \varphi'\rangle$

Exemples fondamentaux:

$Y' = \delta$

$(T_f)' = \{f'\} + \sigma(a)\,\delta_a$

(σ_a = discontinuité en a)

$vp\left(\frac{1}{x}\right) = (\ln|x|)' \quad Pf\left(\frac{1}{x^2}\right) = - vp\left(\frac{1}{x}\right)'$

Multiplication

Produit d'une fonction $\alpha(x)$ et d'une distribution T

$\langle \alpha T, \varphi\rangle = \langle T, \alpha\varphi\rangle$

$T \in \mathcal{D}'$ et $\alpha \in \mathcal{E} \Rightarrow \alpha T \in \mathcal{D}'$

$T \in \mathcal{S}'$ et $\alpha \in \mathcal{O}_M$ (C^∞ à croissance lente) $\Rightarrow \alpha T \in \mathcal{S}'$

$(\alpha T)' = \alpha' T + \alpha T'$

Quelques propriétes de δ

$\delta(-x) = \delta(x)$

$f(x)\,\delta(x-a) = f(a)\,\delta(x-a)$

$\delta[a(x-x_0)] = \frac{1}{|a|}\delta_{x_0}$

$\delta[g(x)] = \sum_j \frac{1}{|g'(x_j)|}\delta(x-x_j)$

g = fonction , x_j zéro de g(x), $g'(x_j) \neq 0$

TRANSFORMEE DE LAPLACE

Notations

Original		Transformée
f(t) ou T(t)	$\sqsupset$	$\mathcal{L}f(p)$ ou $\mathcal{L}T(p)$
$t \in R$		$p = x+iy \in \mathbb{C}$

Des Fonctions

$$\mathcal{L}f(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$$

Existe pour $x > \xi$ abscisse de sommabilité

Des Distributions $T \in \mathcal{D}'_+$, $e^{-xt}T \in \mathcal{S}'$

$$\mathcal{L}T(p) = \mathcal{F}\left[e^{-xt}T\right]\left(\frac{y}{2\pi}\right)$$

$$\mathcal{L}T(p) = \langle T, e^{-pt}\rangle$$

Propriétés

T(t)	$\sqsupset$	$\mathcal{L}T(p)$
T'		$p\,\mathcal{L}T(p)$
T(t-a)		$e^{-at}\mathcal{L}T(p)$
$T\left(\frac{t}{a}\right)$		$a\mathcal{L}T(a\,p)$
S*T		$\mathcal{L}S \,.\, \mathcal{L}T$
$T\,e^{-at}$		$\mathcal{L}T(p+a)$

S'assurer que l'original $\in \mathcal{D}'_+$

Bien comprendre la notation

Yf(t)	$\sqsupset$	$\mathcal{L}f(p)$
Yf'(t)		$p\,\mathcal{L}f(p) - f(0^+)$
(Yf)'		$p\,\mathcal{L}f(p)$
$\int_0^t f(s)\,ds$		$\frac{1}{p}\mathcal{L}f(p)$

Transformées de Laplace remarquables

δ	$\sqsupset$	1
Y		$\frac{1}{p}$
Ye^{-at}		$\frac{1}{p+a}$
$Y\cos(\omega t)$		$\frac{p}{p^2+\omega^2}$

DISTRIBUTIONS

Espaces de fonctions (sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{C}$)

$\mathcal{E} = C^\infty$: fonctions indéfiniment dérivables

$\mathcal{S}$: fonctions C^∞ à décroissance rapide

$\mathcal{D}$: fonctions C^∞ à support borné

$\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{E}$

Distributions: Définitions

Formes Linéaires Continues sur

$\mathcal{D} \Rightarrow$ distributions de Schwartz $\mathcal{D}'$

$\mathcal{S} \Rightarrow$ distributions tempérées $\mathcal{S}'$

$\mathcal{E} \Rightarrow$ distributions à support borné: $\mathcal{E}'$

$\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$

Notations:

T distribution, φ fonction de l'espace de définition

$T(\varphi) = \langle T, \varphi\rangle \in \mathbb{C}$

Exemples 1: Distributions régulières:

à f (x) on associe $T_f = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx$

(au sens de l'intégrale de Lebesgues)

Confusion de notation: on écrit souvent f pour T_f

$T_f \in \mathcal{D}'$ si $f \in L^1_{loc}$

$T_f \in \mathcal{S}'$ si f est à croissance lente.

$T_f \in \mathcal{E}'$ si f est à support borné.

Ainsi: $T_{x^2} \in \mathcal{S}', \notin \mathcal{E}'$ $\quad T_{e^x} \in \mathcal{D}', \notin \mathcal{S}'$

Exemple 2: Distribution (ou masse) de Dirac.

$\langle \delta, \varphi\rangle = \varphi(0)$

$\langle \delta_a, \varphi\rangle = \varphi(a)$ notée aussi $\delta(x-a)$

δ_a est à support ponctuel = point a

Peigne de Dirac

$Ш = \sum_n \delta_n$ noté aussi $Ш(x) = \sum_n \delta(x-n)$

Exemple 3: $vp\left(\frac{1}{x}\right) \quad Pf\left(\frac{1}{x^2}\right) \in \mathcal{S}'$

$$\left\langle vp\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

$$\left\langle Pf\left(\frac{1}{x^2}\right), \varphi\right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx - \frac{2\,\varphi(0)}{\varepsilon}\right]$$

PRODUIT DE CONVOLUTION

Des fonctions: définition

$$h(x) = f * g = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, g(x-y)\, dy$$

(Si l'intégrale existe)

Conditions suffisantes d'existence:

f et g $\in L^1 \Rightarrow h \in L^1$ (algèbre de convolution)

ou: $L^1 * L^2$, $L^1 * L^2$, $L^1 * L^\infty_{loc}$, $E_+ * E_+$, $L^1_{loc} * K$

Des distributions : définition

$< S*T, \varphi > = < S(x), < T(y), \varphi(x+y) > >$

Conditions suffisantes d'existence:

- L'une des distributions est à support borné
- Les deux sont bornées du même coté.

autres possibilités à examiner cas par cas

Propriétés

$S * T = T * S$

$S * (T * U) = (S * T) * U$

Dérivation

$(S * T)' = S' * T = S * T'$

Produits remarquables

$1 * T_f = \int_{-\infty}^{-\infty} f(x)\, dx$

$\delta * T = T$

$\delta' * T = T'$

$\delta(x-a) * T(x) = T(x-a)$

Fonction de corrélation

$$\varphi(x) = f \circledast g = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, g(x+y)\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, g(y-x)\, dy = f * \check{g}$$

TRANSFORMEE DE FOURIER

Des Fonctions

$$\mathcal{F} f(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2i\pi u x}\, dx$$

Si l'intégrale existe. Assuré si $f(x) \in L^1, L^2$

Formule de Plancherel

$$\int f(x)\, \overline{g}(x)\, dx = \int \mathcal{F}f(u)\, \overline{\mathcal{F}g}(u)\, du$$

(si les intégrales existent)

Des distributions tempérées

Transformée de Fourier seulement si $T \in \mathcal{S}'$

$< \mathcal{F}T, \varphi > = < T, \mathcal{F}\varphi >$

Si en outre $T \in \mathcal{E}' \subset \mathcal{S}'$

$\mathcal{F}T(u) = < T(x), e^{-2i\pi u x} >$

Inverse

$\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$ $\qquad \mathcal{F}^{-1}(f) = \mathcal{F}(\check{f})$

Propriétés

$T(x)$ ——>	$\mathcal{F}T(u)$
T'	$2i\pi u\, \mathcal{F}T(u)$
$T(x-a)$	$e^{-2i\pi u a}\, \mathcal{F}T(u)$
$T(ax)$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} \mathcal{F}T(\frac{u}{a})$
$e^{2i\pi u_0 x}\, T(x)$	$\mathcal{F}T(u-u_0)$
$S*T$	$\mathcal{F}S \,.\, \mathcal{F}T$
$S.T$	$\mathcal{F}S * \mathcal{F}T$
$-2i\pi\, xT(x)$	$(\mathcal{F}T)'$

Transformées de Fourier remarquables

1	δ
δ	1
x	$-\frac{1}{2i\pi}\delta'$
δ'	$2i\pi u$
$Ш(x)$	$Ш(u)$
$\sum_n \delta(x-na)$	$\frac{1}{\lvert a \rvert}\sum_n \delta(u-\frac{n}{a})$
$e^{2i\pi u_0 x}$	$\delta(u-u_0)$
Y	$\frac{1}{2}\left[\delta + \frac{1}{i\pi} vp\left(\frac{1}{u}\right)\right]$

DISTRIBUTIONS PERIODIQUES

Fonctions périodiques

f(x) fonction a-périodique, $f \in L^1_{loc}$

$$f(x) = \sum_n c_n\, e^{2i\pi n \frac{x}{a}} \text{ avec } c_n = \frac{1}{a}\int_s^{s+a} f(x)\, e^{-2i\pi n \frac{x}{a}}\, dx$$

Distributions périodiques

T est a-périodique si:

$< T(x), \varphi(x) > = < T(x), \varphi(x+a) >$

$T \in \mathcal{S}'$ et $\exists$ S à support borné tel que:

$$T = S * \sum_n \delta(x-na) = S * \frac{1}{\lvert a \rvert} Ш\left(\frac{x}{a}\right)$$

Généralisation des séries de Fourier:

$$T = \sum_n c_n\, e^{2i\pi n \frac{x}{a}} \text{ avec } c_n = \frac{1}{a}\mathcal{F}S\left(\frac{n}{a}\right)$$

Transformée de Fourier

$$\mathcal{F}T(u) = \sum_n c_n \,.\, \delta\left(u-\frac{n}{a}\right)$$

Relation fondamentale

$$\mathcal{F}\left[Ш(x)\right] = Ш(u) = \sum_n e^{-2i\pi n u}$$

ou encore:

$$\mathcal{F}\left[\sum_n \delta(x-na)\right] = \frac{1}{\lvert a \rvert}\sum_n \delta\left(u-\frac{n}{a}\right) = \sum_n e^{-2i\pi n a u}$$

QUELQUES TRANSFORMEES DE FOURIER

$G_a(x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \exp -\left(\frac{x^2}{2a^2}\right)$	$\frac{1}{a\sqrt{2\pi}} G_{1/2\pi a}(u)$
$\text{Rect}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } \lvert x \rvert > 1/2 \\ 1 \text{ si } \lvert x \rvert < 1/2 \end{cases}$	$\text{sinc}(u) = \frac{\sin(\pi u)}{\pi u}$
$e^{-a\lvert x \rvert}$	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 u^2}$
$Y e^{-x}$	$\frac{1}{1 + 2i\pi u}$