

**Potentiel électrique créé par
une distribution de charges ponctuelles**

I Potentiel électrique

I-1 Introduction du champ scalaire potentiel électrique

Le champ électrique est un champ vectoriel, c'est-à-dire qu'il est caractérisé en chaque point \mathbf{r} de l'espace par un vecteur $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ dont il faut connaître la direction, le sens et l'intensité. Dans un repère orthonormé, il est repéré par ses trois composantes scalaires $E_x(\mathbf{r})$, $E_y(\mathbf{r})$ et $E_z(\mathbf{r})$.

Nous avons vu en outre que pour déterminer le champ électrique total en un point de l'espace, il faut, en vertu du principe de superposition, faire la somme vectorielle de champs électriques élémentaires dus à chacune des charges.

Tout serait tellement plus facile si chaque point de l'espace était caractérisé non pas par un vecteur mais par un scalaire $V(\mathbf{r})$, et si à partir de ce scalaire on pouvait calculer simplement le champ électrique et la force exercée sur une charge q située en ce point.

Eh bien, ce champ scalaire existe, il s'appelle le potentiel électrique.

Dans un repère orthonormé cartésien, les composantes du champ électrique sont liées à ce potentiel électrique par trois relations:

$$\boxed{E_x = - \frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = - \frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = - \frac{\partial V}{\partial z}}$$

I-2 Dérivées partielles

$V(\mathbf{r})$ signifie que V est une fonction de trois variables x , y et z .

$\partial V / \partial x$ est la dérivée partielle de V par rapport à x . Cette dérivée s'obtient en supposant, le temps du calcul, que y et z sont des constantes.

Tout cela, vous le retrouvez en thermodynamique et vous le notez:

$$E_x = - \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{y,z}$$

avec y et z en indice, pour bien vous rappeler que lors de la dérivation, y et z sont à considérer comme des constantes.

Ici nous estimons qu'il n'y a pas d'ambiguïté, aussi, pour ne pas alourdir les formules, nous ne mentionnons pas les variables qui doivent être considérées comme des constantes lors de la dérivation.

Soit la fonction $f(x,y,z) = 2x^2y^2 - z^2x^2 + xy$; calculer les fonctions dérivées partielles de f par rapport à x,y puis z . Calculer ensuite les différentes dérivées partielles des premières dérivées partielles. Que constatez vous?

I-3 Potentiel électrique dû à une charge ponctuelle

Soit une charge électrique q_A placée au point A: $\mathbf{r}_A(x_A, y_A, z_A)$.

Montrons que le potentiel électrique en un point M: $\mathbf{r}(x, y, z)$

$$V(\mathbf{r}) = V(x, y, z) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q_A}{\sqrt{(x-x_A)^2 + (y-y_A)^2 + (z-z_A)^2}}$$

conduit à l'expression du champ électrique donné par la loi de Coulomb.

La dérivation de V par rapport à x, changée de signe, s'écrit:

$$-\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x} = \frac{q_A}{4 \pi \epsilon_0} \left[\frac{(x-x_A)}{\sqrt{(x-x_A)^2 + (y-y_A)^2 + (z-z_A)^2}} \right] \frac{1}{(x-x_A)^2 + (y-y_A)^2 + (z-z_A)^2}$$

où le terme entre crochet n'est autre que la composante selon x du vecteur unitaire \mathbf{u}_{AM} .

La répétition du calcul sur y et z permet de montrer que les composantes de \mathbf{E} s'obtiennent à partir de la forme de potentiel donné ci dessus.

Si on appelle r la distance qui sépare le point M du point A, le potentiel électrique créé en M par la charge q_A placée en A est simplement:

$$V_M = \frac{q_A}{4 \pi \epsilon_0 r}$$

I-4à une constante près

En fait, le le potentiel électrique est déterminé à une constante près.

Il est bien évident que si vous ajoutez une constante quelconque à l'expression de V, le champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, et donc les forces qui s'exerceront sur des charges placées en \mathbf{r} , sont inchangés (les dérivées d'une constante sont nulles).

Puisque en fin de compte les forces représentent les seules grandeurs accessibles à l'expérimentateur, il est bien égal d'ajouter ou de ne pas ajouter une constante au potentiel.

C'est tout de même plus simple de ne pas l'ajouter.

Un système de charges q_i crée dans l'espace un champ électrique $\mathbf{E}(r)$ et un potentiel $V(r)$. A l'origine 0, les composantes du champ électrique sont, exprimées en volts par mètre: $\mathbf{E}(0)=(-30, 20, 10)$ et le potentiel $V(0)$ est de 8 volts. Estimer la valeur du potentiel en $\mathbf{r}(2, -1, 0)$. préciser les hypothèses de calcul.

Un système de charge q_i crée en chaque point de l'espace un champ V. (les distances étant exprimées en cm) $V(-1, 0, 0) = 16V$, $V(1, 0, 0) = 12V$, $V(0, -1, 0) = -15V$, $V(0, 1, 0) = -9V$, $V(0, 0, -1) = -6V$, $V(0, 0, 1) = 8V$. Estimer le champ électrique à l'origine et au point $\mathbf{r}(0.5, 0.5, 0.5)$

II principe de superposition

Nous avons vu dans le chapitre précédent que le champ électrique créé par une distribution de charges était égal à la somme vectorielle des champs électriques créés par chacune de ces charges si elle était seule.

De même, le potentiel électrique créé par une distribution de charges est égal à la somme algébrique des potentiels électriques créés par chacune de ces charges si elle était seule.

Cette propriété découle de la propriété de dérivation d'une somme qui est simplement égale à la somme des dérivées.

Si le champ électrique total $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ en un point \mathbf{r} est la somme vectorielle des champs $\mathbf{E}_A(\mathbf{r})$ et $\mathbf{E}_B(\mathbf{r})$ créés par des charges placées en A et B:

$$\mathbf{E}_x(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{Ax}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_{Bx}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial V_A}{\partial x} - \frac{\partial V_B}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

où:

$$V(\mathbf{r}) = V_A(\mathbf{r}) + V_B(\mathbf{r})$$

Restons cependant modestes. Nous avons présenté comme une avancée le passage du champ électrique au potentiel en disant: "cette fois-ci, nous n'aurons plus à ajouter des vecteurs; nous n'ajouterons que des scalaires". C'est vrai.

Mais ce serait un peu trop beau si un scalaire apportait la même information qu'un vecteur à trois composantes.

En effet, si la connaissance du champ électrique en un point \mathbf{r} nous permet de déterminer la force qui s'applique sur une charge q placée en ce point \mathbf{r} par la relation:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

La connaissance du potentiel en cet unique point \mathbf{r} ne permet pas à lui seul de déterminer la force qui s'applique sur la charge q . Il nous faut savoir aussi comment V varie au voisinage de ce point, puisque c'est des dérivées partielles de V que sont déduites les composantes de \mathbf{E} et finalement de \mathbf{F} .

III-Topologie

III-1 Equipotentiellles

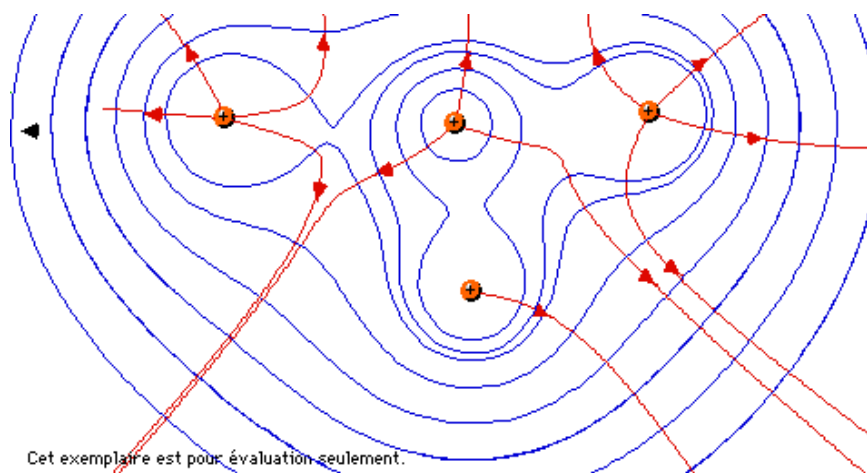
Si la topologie d'un champ vectoriel est donnée par les lignes de champ, la topologie d'un champ scalaire est donnée par des courbes de niveau. Dans le cas d'un potentiel électrique, les courbes de niveau s'appellent les équipotentiellles. Ce sont les courbes joignant les points de même potentiel.

Une charge $q=10^{-6} C$ est placée à l'origine. Tracer quelques équipotentiellles. Comment se situent-elles par rapport aux lignes de champ?

III-2 Propriétés des équipotentiellles.

Les équipotentiellles sont des lignes fermées (se fermant éventuellement à l'infini). Elles entourent les charges.
Elles sont perpendiculaires aux lignes de champ.

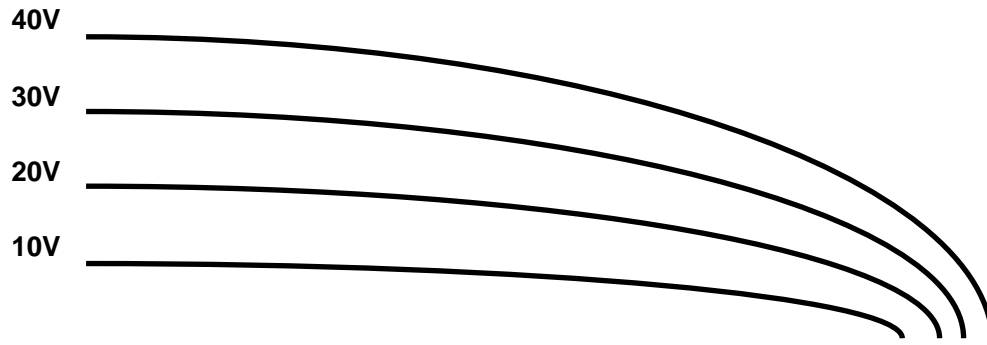
III-3 Exemple d'un système de lignes de champ et d'équipotentiellles.



Tracé à partir du logiciel YP Champ électrique
<http://www.ncf.carleton.ca/~ch865/champelectrique.html>

III-4 Détermination graphique de champs électriques

A partir des quelques équipotentielles du schéma ci-dessous, tracer à la même échelle les vecteurs champs électriques aux endroits indiqués par des points.



III-5 Analogie cartographique

Vous avez tous effectué des promenades en montagne avec des cartes présentant des lignes de niveau. Ces lignes rejoignent les points situés à la même altitude. Ce sont des lignes fermées entourant les sommets et les fonds. Elles sont strictement équivalentes aux équipotentielles.

Les lignes équivalentes aux lignes de champ ne sont pas représentées. Pour ce faire, il faut prendre en chaque point la perpendiculaire aux lignes de niveau. Les nouvelles lignes indiquent la direction de la pente au point considéré (sens d'écoulement de l'eau).

Plus les lignes de niveau sont serrées, plus la pente est importante. La pente locale est le pendant du champ électrique.



cartes empruntées à : <http://perso.wanadoo.fr/jmlt/orien2.htm>

IV le gradient

IV-1 Une diversité de démarches complémentaires

Dans votre métier, vous aurez à résoudre des problèmes pratiques et concrets.

C'est la démarche que nous avons pratiquée dans les exercices ci-dessus. Il y a peu de mathématique mais il faut avoir compris la physique du problème et faire preuve d'initiative. Nous disposons d'informations limitées en nombre ou sous forme graphique.

Il existe des démarches beaucoup plus mathématiques qu'il faut aussi savoir utiliser parce qu'elles représentent des moyens très puissants de résolution de problèmes (pourvu qu'ils soient bien posés). Les mathématiques conduiront à des solutions, qu'il faudra interpréter physiquement et dont il faudra s'assurer de la cohérence en examinant quelques cas limites. Il ne faut pas utiliser l'arsenal mathématique "tête baissée et a priori" mais il ne faut pas non plus y renoncer par crainte du calcul. Vous l'aurez compris: la fin de ce chapitre se dirige vers un développement plus mathématique des champs et potentiels électriques.

IV-2 Vecteur gradient

De façon générale, à partir d'un champ scalaire, il est possible de construire un champ vectoriel dont les composantes en coordonnées cartésiennes sont données par les relations:

$$E_x = - \frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = - \frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = - \frac{\partial V}{\partial z}$$

Un vecteur défini ainsi est appelé (au signe près) un gradient:

$$\mathbf{E} = - \text{grad } V$$

Nous verrons plus tard que le gradient peut être considéré comme un être mathématique avec ses propriétés propres.

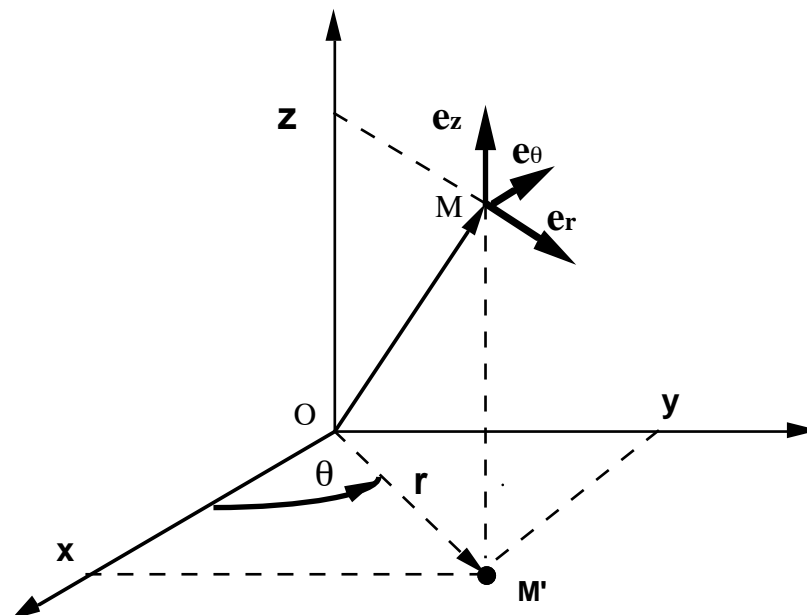
Dans le cadre de ce qu'on appelle l'analyse vectorielle, on sera appelé à manipuler cette grandeur (et quelques autres) en oubliant, comme pour tout vecteur, ses composantes dans un repère particulier.

Nous voulons ici donner simplement les composantes du gradient dans deux repères appelés cylindrique et sphérique.

V- Coordonnées cylindriques

V-1 Repérage d'un point en coordonnées cylindriques

En coordonnées cylindriques, un point M de l'espace est repéré comme un point de cylindre (droit, à base circulaire) dont l'axe Oz est généralement confondu avec l'axe Oz du repère cartésien.



M (ou \mathbf{r}) est repéré par le rayon r du cylindre sur lequel il s'appuie, z sa cote par rapport au plan de référence xOy et θ l'angle ($0x, OM'$) où M' est la projection de M sur le plan xOy .

La notation $\mathbf{r}(r,\theta,z)$ vient se substituer à $\mathbf{r}(x,y,z)$ du repère cartésien. Vous pouvez facilement vérifier que, pour un point donné, les composantes cartésiennes et cylindriques sont liées par:

$$x = r \cos\theta \quad y = r \sin\theta \quad z = z$$

V-2 Repérage d'un vecteur en coordonnées cylindriques

Nous nous posons la question de repérer un vecteur dont le point d'application est situé au point M , $\mathbf{r}(r,\theta,z)$

Pour cela nous attachons à M un repère orthonormé local. Nous l'appelons local par ce qu'il n'est pas le même pour tous les points M de l'espace.

Ce repère local est fait de 3 vecteurs unitaires de base orthogonaux :

\mathbf{e}_r est un vecteur parallèle à OM'

\mathbf{e}_θ est parallèle au vecteur tangent en M' au cercle de rayon OM' contenu dans le plan xOy

\mathbf{e}_z est parallèle à l'axe oz

Dans ce repère, le vecteur champ électrique a 3 composantes:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_z \end{pmatrix}$$

Ecrire dans ce repère les composantes des vecteurs unitaires $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ du repère cartésien.

Noter qu'en coordonnées cartésiennes le même repère ($\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$) est attaché à chaque point de l'espace.

V-3 Gradient en coordonnées cylindriques

Lorsque le potentiel $V(\mathbf{r})$ est exprimé à l'aide des trois variables (r,θ,z) les composantes du champ électrique dans le repère cylindrique attaché au point M sont données par:

$$\mathbf{E} = - \mathbf{grad} V = \begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial V}{\partial r} \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ -\frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}$$

VI Coordonnées sphériques

VI-1 Repérage d'un point en coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques, un point M (\mathbf{r}) est considéré comme point d'une sphère.

M est repéré

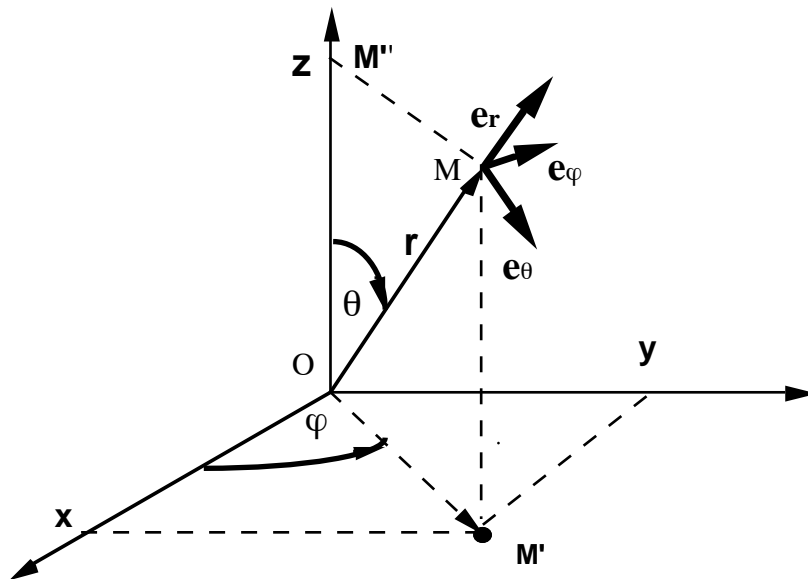
- par le rayon r de la sphère à laquelle il appartient
- L'angle θ entre la direction \mathbf{Oz} et la direction \mathbf{OM} .
 $\theta = (\mathbf{Oz}, \mathbf{OM})$

- l'angle φ entre la direction \mathbf{Ox} et la direction \mathbf{OM}' où M' est la projection de M dans le plan xOy :

$$\varphi = (\mathbf{Ox}, \mathbf{OM}')$$

Un point $M(\mathbf{r})$ étant donné, montrer que ses coordonnées cartésiennes s'écrivent en fonction des coordonnées sphériques; ainsi:

$$x = r \sin\theta \cos\varphi \quad y = r \sin\theta \sin\varphi \quad z = r \cos\theta$$



En géographie, où on est amené à repérer un point sur la sphère terrestre, l'angle θ indiquerait la latitude par rapport au pôle nord et l'angle φ longitude est par rapport au méridien de référence.

VI-2 Repérage d'un vecteur en coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques, un vecteur $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ attaché au point \mathbf{r} est repéré par trois composantes (E_r, E_θ, E_φ) dans un repère orthonormé local ($\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$):

$$\mathbf{E} = E_r \mathbf{e}_r + E_\theta \mathbf{e}_\theta + E_\varphi \mathbf{e}_\varphi,$$

\mathbf{e}_r est parallèle à la direction \mathbf{OM}

\mathbf{e}_θ est tangent en M au cercle de rayon r décrit dans le plan qui contient à la fois les directions \mathbf{Oz} , \mathbf{OM} et \mathbf{OM}'

\mathbf{e}_φ est tangent en M au cercle de centre M'' et de rayon $M''M$ contenu dans le plan perpendiculaire à \mathbf{Oz} .

Considérons les champs et potentiels électriques créés par une charge ponctuelle q placée à l'origine O . Exprimer V puis les composantes de \mathbf{E} en coordonnées sphériques.

VI-3 Gradient en coordonnées sphériques

Lorsque le potentiel $V(\mathbf{r})$ est exprimé à l'aide des trois variables (r, θ, φ) les composantes du champ électrique dans le repère sphérique attaché au point M sont données par:

$$\mathbf{E} = - \mathbf{grad} V = \begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - \frac{\partial V}{\partial r} \\ - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

Tout cela vous semble sans doute bien compliqué! Cela se clarifiera à l'usage.

Pour vous rassurer, déduisez le champ électrique \mathbf{E} créé par une charge ponctuelle à partir de l'expression du potentiel $V(r, \theta, \varphi)$ exprimé en coordonnées sphériques.

VII Le rotationnel du champ électrique

Considérons un champ de vecteur $\mathbf{E}(x, y, z)$ et ses composantes $E_x(x, y, z)$, $E_y(x, y, z)$ et $E_z(x, y, z)$.

On appelle rotationnel de \mathbf{E} le vecteur $\mathbf{rot}(\mathbf{E})$ dont les composantes en coordonnées cartésiennes sont:

$$\mathbf{rot}(\mathbf{E}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Si le champ de vecteur \mathbf{E} dérive d'un potentiel scalaire V selon la relation $\mathbf{E} = - \mathbf{grad} V$, alors $\mathbf{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{E} = - \mathbf{grad} V \Rightarrow \mathbf{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

($\mathbf{0}$ en caractère gras signifie vecteur nul)

Le rotationnel est un nouvel être mathématique de l'analyse vectorielle.

Retenons pour l'instant qu'un champ de vecteur dont le rotationnel n'est pas nul ne peut pas être un champ électrique. Dans ce cas en effet il ne dériverait pas d'un gradient.

VIII Le "vecteur" nabla

Le "vecteur nabla" noté ∇ est largement utilisé dans les ouvrages anglo-saxons. Ce n'est pas un vrai vecteur mais seulement un vecteur symbolique, c'est-à-dire qu'on peut (moyennant quelques précautions) le manipuler comme un vecteur. Il s'écrit:

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

et en coordonnées cartésiennes, ses composantes sont:

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Le rotationnel du vecteur \mathbf{E} apparaît comme le produit vectoriel de nabla et de \mathbf{E} :

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = \nabla \wedge \mathbf{E}$$

Le gradient de V apparaît comme le produit de nabla et de V :

$$\mathbf{grad} V = \nabla V$$

Attention: l'utilisation de ce "vecteur" comporte quelques pièges!!

