CHAPITRE III

Champs et potentiels créés

par des distributions de charges non ponctuelles

I- Introduction

Jusqu'ici, nous avons admis que les charges étaient ponctuelles, c'est-à-dire localisées en des points de dimension "infiniment petite".

Cela est correct lorsque l'on considère la charge de particules élémentaires telles que l' électron ou le proton.

Cela reste raisonnable lorsque les objets chargés sont de dimension petite comparée à la distance qui les sépare de l'observateur.

L'approximation devient médiocre lorsque au moins une des dimensions de l'objet portant la charge électrique devient significative devant la distance objet-observateur.

Elle devient totalement irréaliste lorsque cette dimension est plus grande que la distance objet-observateur.

Nous allons examiner les effets d'extension spatiale de l'objet portant la charge électrique en procédant en trois étapes:

i) La taille de l'objet est importante dans une seule des dimensions et reste faible dans les deux autres dimensions. L'objet est typiquement un fil, linéaire ou curviligne. Les charges sont distribuées suivant une ligne.

ii) L'objet est étendu suivant deux directions. C'est une feuille plane ou "ondulée". Les charges sont distribuées sur une surface.

iii) L'objet est étendu dans les trois directions. C'est un volume au sein duquel les charges sont continûment réparties.

II Répartition des charges sur un objet filiforme

II-1 Densité de charge linéique:

Considérons un fil AB, rectiligne ou curviligne, de longueur L portant une charge électrique Q uniformément répartie.

On appelle densité de charge linéique ou charge par unité de longueur la quantité $\lambda = Q / L$

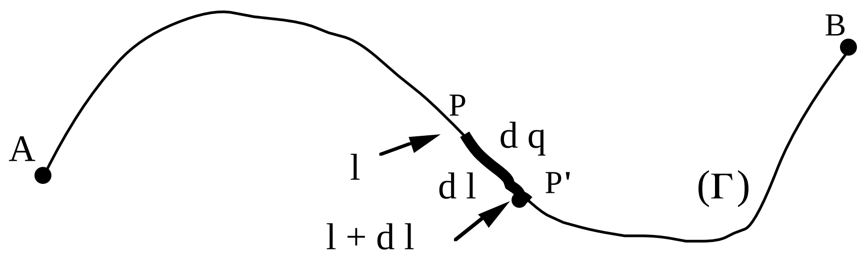
Déterminer la charge linéique d'un fil de 4m chargé uniformément d'une charge de 10^{-3} C.

Dans le cas général, la charge n'est pas uniformément répartie et la densité de charge linéique varie de point en point.

Sur un tel fil, un point P est repéré par sa coordonnée curviligne l. Cette coordonnée l représente la distance que doit parcourir un mobile partant d'un point 0 choisi comme origine pour rejoindre le point P.

Soit un point P' ,voisin de P, de coordonnée curviligne l+dl

L'élément de fil PP' de longueur dl porte un élément de charge dq.



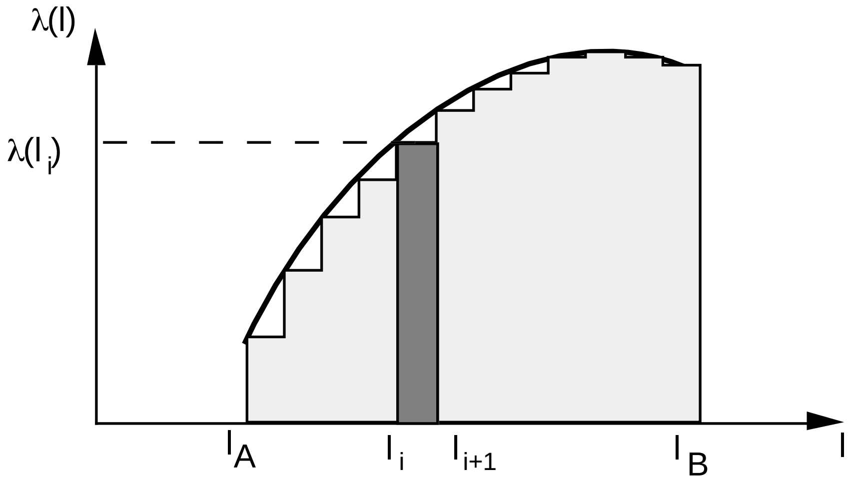
On appelle densité de charge linéique en l la limite lorsque P' se rapproche de P de la grandeur de dq/dl

$$\lambda(l) \;=\; \lim_{dl \to 0} \left(\frac{dq}{dl} \right)$$

La densité de charge linéique s'exprime en Coulombs par mètre.

Il est bien clair que dans l'expression ci-dessus, dq et dl tendent vers 0 simultanément mais que le rapport des deux tend vers une limite finie.

Pour déterminer la charge totale connaissant λ(l), découpons le fil en éléments de longueurs Δl_i situés entre les cotes l_i et l_{i+1}.



Affectons une densité de charge uniforme $\lambda(l_i)$ à l'élément de fil compris entre l_i et l_{i+1}. L'élément de charge Δq_i portée par l'élément de longueur $\Delta l_i = l_{i+1} - l_i$ est égal au produit $\lambda(l_i)\,\Delta l_i$ c'est-à-dire à l'aire du rectangle grisé sombre.

La charge totale portée par le fil est alors égale à la somme des aires de tous les rectangles.

$$Q = \sum_i \Delta\, q_i \;=\; \sum_i \lambda\,(\,l_i\,)\;\Delta l_i$$

Cette valeur n'est qu'approximative puisqu' on a affecté la même densité de charge entre l_i et l_{i+1}. Elle devient plus proche de la réalité si on affine le pas de la découpe. Elle tend vers l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe λ(l) et les deux droites verticales élevées en A et B

Comme vous l'avez vu, cette aire est égale à l'intégrale de λ(l) entre l_A et l_B, abscisses curvilignes des points A et B.

$$Q = \int_{l_A}^{l_B} \lambda (l)\, dl \;=\; \int_{A\ (\Gamma)}^{B} \lambda (l)\, dl$$

La deuxième notation signifie intégrale curviligne effectuée en suivant la ligne (Γ).

II-2 Exemple de charge portée par un fil

Considérons un fil de longueur L d'origine A de coordonnée curviligne l. Supposons que la densité de charge linéique de ce fil soit fonction de l'abscisse l et s'écrive $\lambda(l) = 10^{-4}\, l$.

Entre les points d'abscisse l et d'abscisse l + dl, l'élément de charge est $dq = \lambda(l)\, dl = 10^{-4}\, l\, dl$.

La charge totale est donc:

$$Q = \int_{0}^{L} 10^{-4}\, l\, dl = 10^{-4} \left[\frac{l^2}{2} \right]_{O}^{L} = 5.10^{-3}\, L^2$$

La charge totale portée par un fil de longueur L est de 10^{-6}C. Sachant que la répartition de charge est de la forme $l(l) = A\, l^{\,2}$, déterminer le coefficient A.

III Calcul du potentiel électrique créé par un fil chargé

III-1 Approximation par discrétisation

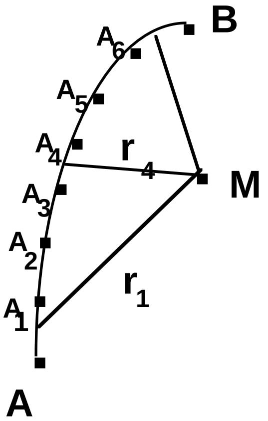
Considérons un fil curviligne AB. Ce fil est chargé avec une densité linéique λ(l). Notre objectif est de calculer le potentiel créé par les charges portées par ce fil en un point quelconque M de l'espace.

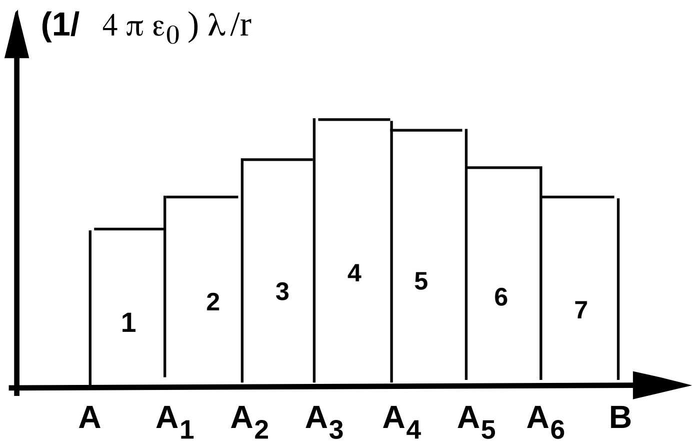
Pour cela, divisons le fil AB en segments AA_1, A_1A_2, $A_{i-1}A_i$, etc. assez petits pour que l'on puisse considérer:

i) que tous les points appartenant au même ségment élémentaire $A_{i-1}A_i$ sont à la même distance r_i de M.

ii) que la densité de charge linéique λ_i dans l'intervalle $A_{i-1}A_i$ est uniforme.

Dans ces conditions, la charge portée par le segment AA_1 est $l_1\, \Delta l_1$. La charge portée par le segment $A_{i-1}A_i$ est $l_i\, \Delta l_i$.





L'élément de potentiel potentiel créé par le segment $\Delta l_1 = AA_1$ est:

$$\Delta V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda_1 \; \Delta l_1}{r_1}$$

Le potentiel créé par le segment $\Delta l_i = A_{i-1}A_i$ est:

$$\Delta V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda_i \; \Delta l_i}{r_i}$$

Traçons un diagramme faisant figurer en abscisse les distances Δl_i, et en ordonnée les grandeurs $(1/4\pi\,\varepsilon_0)\,\lambda_i/r_i$, etc.

Le potentiel ΔV_i peut être considéré comme l'aire du rectangle i, de largeur Δl_i et de hauteur $(1/4\pi\,\varepsilon_0)\,\lambda_i/r_i$.

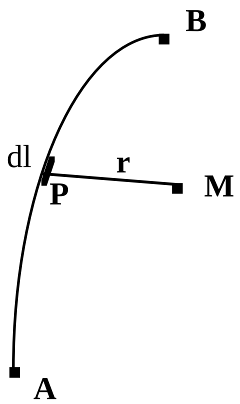
En vertu du principe de superposition, le potentiel total est la somme des aires de tous les rectangles soit:

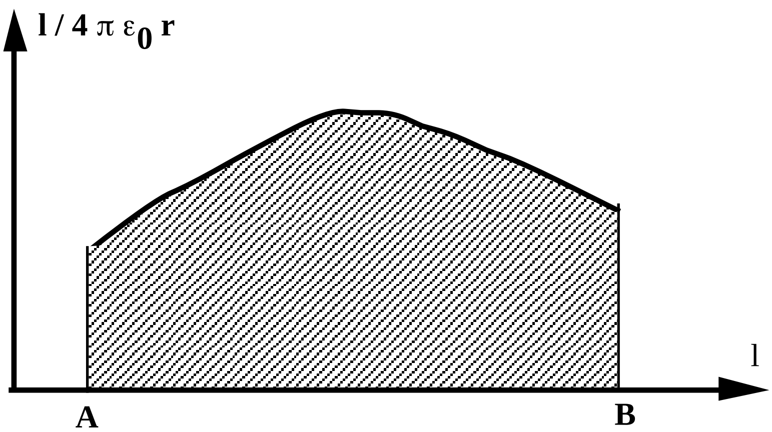
$$V = \sum_{i=1}^{i=7} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda_i \; \Delta\, l_i}{r_i}$$

III-2 Limite continue

Le calcul ci-dessus ne constitue qu'une première approximation. Pour effectuer un calcul plus précis, il nous faut de nouveau affiner le maillage et faire tendre la courbe en escalier vers une courbe continue.

Le potentiel total est l'aire sous la courbe représentant $(1/4\pi\varepsilon_0)\lambda/r$ en fonction de l





Soit:

$$\boxed{V_M = \int_{A\ (\Gamma)}^{B} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda(l)\, dl}{r\,(l)}}$$

L'intégration est alors plus ou moins facile à effectuer selon la forme de $\lambda(l)$ et de r(l).

On peut donc dire que l' élément de potentiel dV créé en M par la charge électrique $dq=\lambda(l)\,dl$ localisée au voisinage du point P entre les abscisses curvilignes l et l+dl et située à la distance r(l) s'écrit:

$$d\,V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda(l)\;\; dl}{r\,(l)}$$

et que le potentiel total est la somme (au sens de l'intégrale) des éléments dV.

C'est un type de calcul infinitésimal que nous serons très souvent amenés à répéter en physique.

III-3 Coordonnées du point source et de l'observateur

Lors du calcul d'un élément de potentiel, nous avons deux points à considérer: le point source P où se trouve l'élément de charge et le point M, où se situe l'observateur, et en lequel on cherche à calculer le potentiel V.

Chacun de ces points est décrit par ses propres coordonnées. Lorsqu'il y a confusion possible, nous noterons avec un ' **r**'(x',y',z') les coordonnées du point source et **r**(x,y,z) les coordonnées du point M.

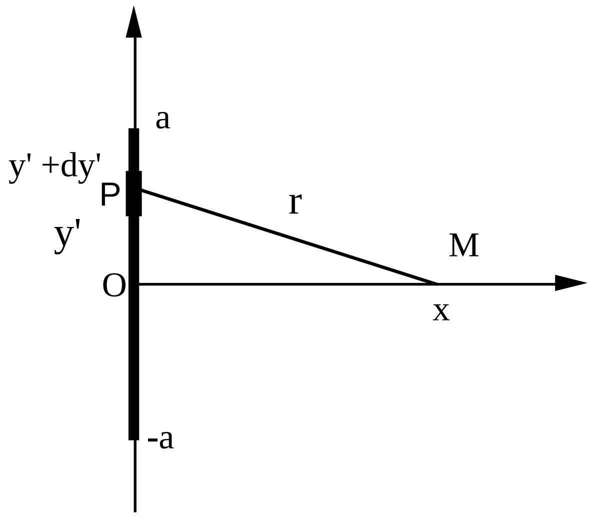
Pour calculer le potentiel, on devra intégrer sur les variable x',y',z' et on obtiendra une fonction V(x,y,z). Le champ électrique en **r** sera déduit du gradient de V, en dérivant par rapport à x,y,z.

Dans bien des cas, il n'y a pas de confusion possible, et nous ne prendrons pas la peine d'ajouter des ' .

III-4 Exemple de calcul de potentiel

Examinons le fil rectiligne de longueur L=2a uniformément chargé, centré en 0 et dirigé le long de l'axe 0y. Calculons le potentiel en un point M situé sur l'axe 0x à la distance x du fil.

Les coordonnées de P sont (x',y',z') et celles de M sont (x,y,z)



Considérons un élément de longueur dy' compris entre y' et y'+dy'. La charge portée par cet élément est égale à λ dy'. La distance entre cet élément de longueur et le point M est égale à $(x^2 + y'^2)^{1/2}$.

La contribution dV de cet élément dy' au potentiel en M est donc:

$$d V = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{\lambda \; dy'}{\sqrt{y'^2 + x^2}}$$

et par intégration sur les y' entre -a et +a, nous avons:

(Pour ce qui est de l'intégration, voyez un cours de mathématique ou consultez les tables)

$$V(x,0) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{+a}\frac{dy'}{\sqrt{y'^2+x^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left(y' + \sqrt{y'^2+x^2}\right)\right]_{-a}^{+a} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{-a+\sqrt{a^2+x^2}}$$

C'est un résultat exact.

De façon similaire, on peut calculer V(x,y) en tout point du plan x0y de la figure.

Le potentiel en un point (x,y,z) quelconque de l'espace se déduit de V(x,y) par rotation autour de l'axe Oy.

Un fil rectiligne de longueur 10cm porte une charge de 1μC uniformément répartie sur sa longueur. Représenter l'évolution du potentiel le long de l'axe ox.

III-5 Examen du comportement asymptotique

Il est toujours heureux, après un tel calcul, d'examiner si le comportement à grande distance, ou à petite distance, ou encore en des points particuliers de haute symétrie, sont physiquement raisonnables.

Ainsi, dans l'exemple précédent, on s'attend à ce que l'expérimentateur placé à grande distance du fil (comparé à sa longueur 2a) ne se rende plus tout à fait compte de son extension spatiale et le voie comme une charge ponctuelle Q= 2aλ dont il serait à la distance de x. Ainsi on attend à grande distance un comportement du potentiel de la forme:

$$V(x,0) \approx \frac{2a\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}$$

On retrouve effectivement ce comportement en écrivant:

$$\ln\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{-a+\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}}\right)$$

En tenant compte du développement limité (pour ε petit) du logarithme au voisinage de l'unité:

$$\ln(1+\varepsilon) \approx \varepsilon$$

où ici:

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}}$$

et en tenant compte du fait que $(x^2/a^2) >> 1$

On obtient pour x>>a:

$$V(x,0) \approx \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a}{x} \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x}$$

Il est clair que nous avons négligé a devant x aux moments "opportuns".

Vous allez sans doute vous demander ce que sont ces moments opportuns.

Pour les déceler, il y a deux conditions:

i) Il faut connaître les développements limités les plus courants,

ii) Il faut pratiquer et faire un certain nombre de telles approximations.

Nous n'insisterons jamais assez pour vous inciter à examiner ce que deviennent des formules trouvées par de longs calculs, dans des cas particuliers simples ou dans des conditions extrêmes.

IV Champ électrique créé par un fil

IV-1 Champ électrique, dérivée du potentiel

Le calcul du champ électrique en un point **r** à partir du potentiel électrique nécessite en principe la connaissance du potentiel au voisinage de ce point et cela dans toutes les directions (suivant x, y et z). On utilise alors la relation:

$$\mathbf{E} = -\,\mathbf{grad}\,V.$$

Toutefois, par des arguments de symétrie, la détermination du champ électrique en des points, le long de lignes ou sur des plans particuliers peut ne nécessiter qu'une connaissance partielle du potentiel.

C'est le cas dans l'exemple du fil uniformément chargé, si l'on veut déterminer le champ électrique en des points situés sur l'axe 0x ou plus généralement dans le plan x0z. Par symétrie, il est clair qu'en tout point M du plan bissecteur du fil, le champ électrique est dirigé dans la direction 0M. Cela signifie que si M est sur l'axe 0x, le champ électrique n'a de composante ni suivant y ni suivant z. La seule composante du champ est donc:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

qui ne requiert que la connaissance de la variation de V en fonction de la variable x.

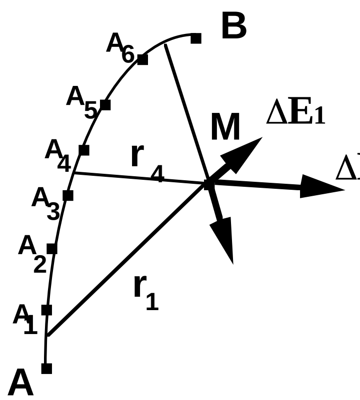
Montrer que la composante E_x du champ électrique en un point de l'axe ox s'écrit:

$$E_x(0,x) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{x\sqrt{a^2+x^2}}$$

Discuter son comportement à grande distance

IV-2 Formule générale du champ électrique créé par un fil

Reprenons la découpe du fil curviligne et déterminons le champ électrique $\Delta\mathbf{E_i}$ créé par chaque élément de longueur Δl_i compris entre A_{i-1} et A_i et placé à la distance r_i du point M.



Chaque élément de fil $A_{i-1}A_i$ crée en M un élément de champ qui est un vecteur:

$$\Delta\,\mathbf{E_i} = \frac{\lambda_i\ \Delta l_i}{4\pi\varepsilon_0\, r_i^2}\ \mathbf{u_i}$$

où $\mathbf{u_i}$ est le vecteur unitaire joignant le milieu du segment de droite $A_{i-1}A_i$ au point M.

Le champ électrique total **E** est la <u>somme vectorielle</u> des champs élémentaires

$$\mathbf{E} = \sum_i \frac{\lambda_i \, \Delta l_i}{4 \pi \varepsilon_0 r_i^2} \mathbf{u_i}$$

ce qui signifie que composante par composante: (nous écrivons ici la composante cartésienne x, nous pourrions le faire sur toute autre composante):

$$E_x = \sum_i \frac{\lambda_i \, \Delta l_i}{4 \pi \varepsilon_0 r_i^2} u_{i,x}$$

Par passage à la limite continue on obtient pour E_x

$$E_x = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \int_A^B \frac{\lambda (l) \, dl}{r^2(l)} u_x (l)$$

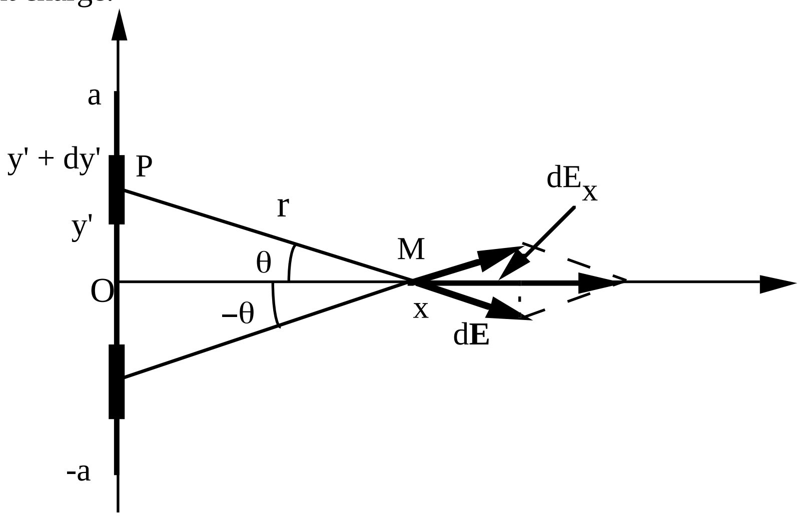
Le même calcul peut être répété pour les deux autres composantes:
ce que nous récapitulons formellement par:

$$\boxed{\mathbf{E}_M = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \int_A^B \frac{\lambda (l) \, dl}{r^2(l)} \mathbf{u} (\mathbf{l})}$$

Cette équation entre vecteur est formelle en ce sens qu'on ne peut pas intégrer directement. Il faut faire la somme vectorielle des éléments de champ électrique. Cette relation ne fait que synthétiser trois intégrales scalaires définissant chacune les composantes du champ éléctrique.

<u>IV- 3 Exemple de calcul</u>

Reprenons le calcul du champ électrique **E**(x,0) créé par un fil de longueur 2a, uniformément chargé.



L' élément de fil de longueur dy' compris entre y' et y'+dy', situé à la distance $(x^2+y'^2)^{1/2}$ de M, porte une charge λdy'. La composante u_x du vecteur unitaire est :

$$u_x = \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y'^2}}$$

Il vient:

$$E_x(x,0) = \frac{\lambda\, x}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \int_{-a}^{+a} \frac{1}{\left(x^2+y'^2\right)^{3/2}}\, dy'$$

Soit:

$$E_x(x,0) = \frac{\lambda\, x}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \left[\frac{y'}{x^2\sqrt{x^2+y'^2}} \right]_{y'=-a}^{y'=+a}$$

Soit encore en tenant compte de Q=2al:

$$E_x(x,0) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{x\sqrt{a^2+x^2}}$$

Reprendre plusieurs fois et en détail l'ensemble du calcul. Il a valeur d'exemple.

On peut voir aussi sur la figure ci-dessus que des éléments de fil symétriques par rapport à l'axe 0x produisent des éléments de champ dont la résultante est orientée suivant 0x. Cela justifue qu'en tout point M du plan bissecteur du fil, le champ électrique est dirigé suivant 0M.

Montrer par le calcul que $E_y(x,0)$ est nul.

V Charge surfacique

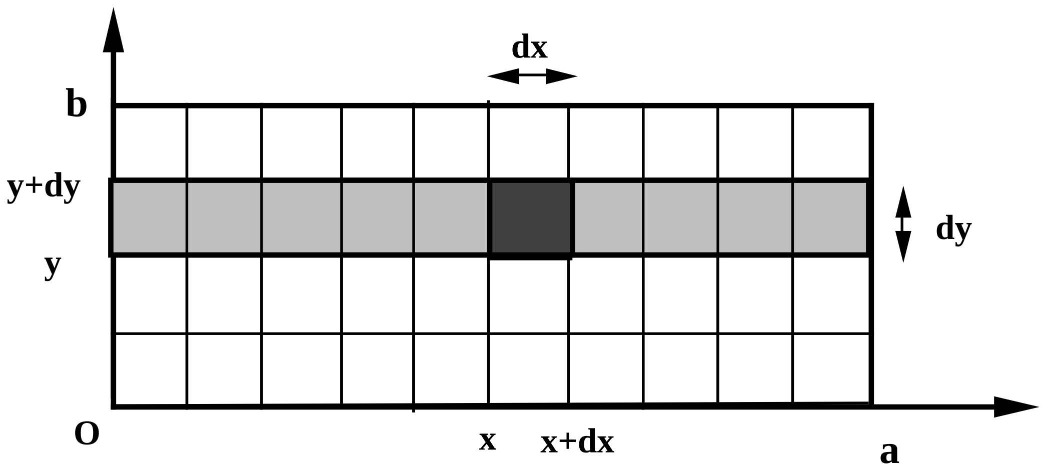
V-1 Densité de charge surfacique

Considérons une surface S (non nécessairement plane) portant une charge Q uniformément répartie. On appelle densité de charge surfacique la quantité σ= Q/S.

Tout comme le fil, la surface peut ne pas être chargée uniformément. Dans ce cas il faut préciser la charge surfacique en chaque point de la surface, à l'aide d'un repère adapté à la forme de la surface.

Si la surface est plane, on choisira un repère cartésien ou polaire. Si la surface est en forme de calotte sphérique, on penchera plutôt pour pour un repère sphérique. Si la surface est gauche..., ce sera beaucoup plus complexe et il faudra se tourner vers des méthodes numériques.

V-2 Densité de charge surfacique en coordonnées cartésiennes



Le repère cartésien est particulièrement bien adapté lorsque la surface est rectangulaire et plane.

Dans le repère (x0y), un élément de surface, dont l'abscisse est compris entre entre x et x+dx, et l'ordonnée entre y et y+dy, présente un élément d'aire dS= dx dy (en gris foncé sur la figure ci-avant) et porte un élément de charge $d^2q(x,y)= \sigma(x,y)$ dx dy.
(Pour les notations, voir la note sur les infiniments petits au paragraphe suivant).

Le calcul de la charge totale de la plaque peut alors s'effectuer en deux étapes :

i) Détermination de l'élément de charge dq portée par un élément rectangulaire de longueur a et de largeur dy (élément en gris clair) compris entre y et y+dy. Cet élément de charge est une fonction de la variable y et s'obtient en faisant la somme des éléments de charge dq selon x (dans ce calcul y est une constante).

$$d\,q(y) = \int_{x=0}^{x=a} dq(x,y) = \int_{x=0}^{x=a} [\,\sigma(x,y)\,dy\,]\,dx = dy \int_{x=0}^{x=a} \sigma(x,y)\,dx = \lambda(y)\,dy$$

Il s'agit d'un calcul tout à fait équivalent à celui de la charge d'un fil rectiligne de longueur a, portant la charge linéique $\sigma(x,y)$ dy.

Nous avons sorti dy de l'intégration car il ne dépend pas de x.

dq(y) prend la forme t(y) dy et représente l'élément de charge apporté par les tranches dont l'ordonnée est comprise entre y et y+dy.

ii) Sommation des contribution de charge dq apportée par chaque tranche dy:

$$Q = \int_{y=0}^{y=b} dq(y) = \int_{y=0}^{y=b} t(y)\,dy$$

Nous avons intégré sur x puis intégré sur y. Nous aurions pu faire l'inverse, c'est-à-dire intégrer sur les y puis sur les x. Nous aurions alors fait la somme de contributions de bandes verticales d'épaisseur dx.

Bien sûr, le résultat est indépendant de l'ordre d'intégration et l'on note:

$$Q = \int_{x=0}^{x=a} \int_{y=0}^{y=b} \sigma(x,y)\,dx\,dy = \int_{y=0}^{y=b} \int_{x=0}^{x=a} \sigma(x,y)\,dx\,dy$$

Ceci est appelé intégrale double.

<u>V-3 Note sur les infiniments petits</u>

- dx ou dy sont des infiniment petits du premier ordre.

- une expression renfermant le produit de deux infiniment petits du premier ordre est un infiniment petit du deuxième ordre; elle se note en principe d^2S = dx dy ou $d^2q= \sigma(x,y)$ dx dy.

--une expression renfermant le produit de trois infiniment petits du premier ordre est un infiniment petit du troisième ordre. Par exemple, l'élément de volume $d^3\tau$= dx dy dz.

L'exposant (2 ou 3) indiquant l'ordre de l'infiniment petit est généralement omis lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté et l'on note souvent dS pour d^2S ou $d\tau$ pour $d^3\tau$.)

<u>V-3 Exemple de charge portée par une surface rectangulaire</u>

Considérons une surface rectangulaire dont les abscisses sont situées entre x = a et x = b et les ordonnées entre y = c et y = d. Supposons que cette surface soit chargée avec une densité surfacique $\sigma(x,y)$ fonction de x et de y, $\sigma(x,y) = A\,(x^2+y^2)$. Déterminons la charge totale de la plaque.

Procédons comme ci-avant et intégrons tout d'abord suivant les x:

$$dq(y) = dy \int_{x=a}^{x=b} A(x^2+y^2)\,dx = dy \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x\right]_{x=a}^{x=b}$$

$$= dy \left[\frac{b^3 - a^3}{3} + y^2\,(b-a)\right]$$

C'est la charge apportée par le rectangle gris clair situé entre y et y+dy.

Par intégration sur les y, on obtient la charge totale soit:

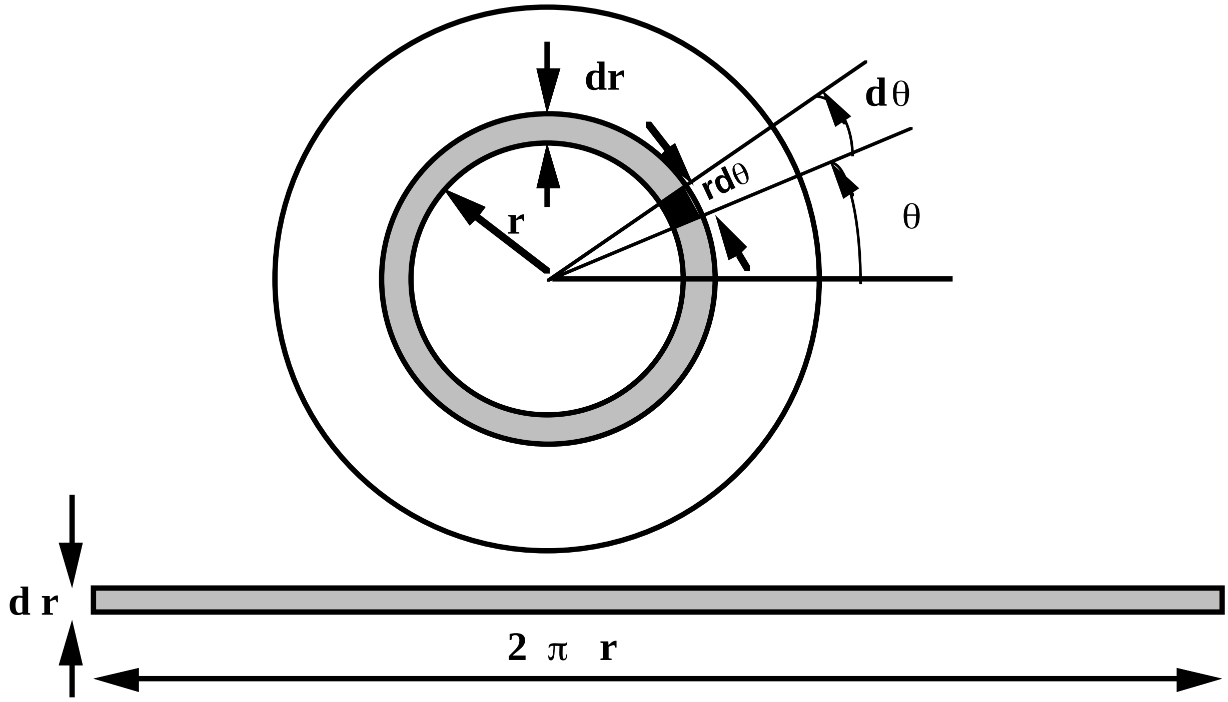
$$Q = \int_{y=c}^{y=d} \left[\frac{b^3 - a^3}{3} + y^2\,(b-a)\right] dy$$

Terminer le calcul de Q

V-4 Densité de charges surfaciques en coordonnées polaires

Les coordonnées polaires sont les coordonnées naturelles d'objets circulaires. Un point M est repéré par la distance r = 0M qui la sépare du centre 0 et l' angle orienté θ que fait la direction **OM** avec l'axe des x.

Les coordonnées polaires sont équivalentes aux coordonnées cylindriques à la cote z=0.



Une surface élémentaire du deuxième ordre est représentée en noir sur le dessin ci-dessus. Dans la limite de dr et de $d\theta$ petits, cette surface est un petit rectangle de cotés dr et r $d\theta$.

L'élément de surface d^2S s'écrit:

$$d^2S = r\,dr\,d\theta$$

Si l'on fait l'intégrale (somme) de cette expression sur tous les angles θ compris entre 0 et 2π, on obtient un nouvel élément de surface représenté en gris. Ce nouvel élément de surface (maintenant infiniment petit du premier ordre) s'écrit:

$$dS = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} r\, dr\, d\theta = r\, dr \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta = r\, dr \left[\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 2\pi\, r\, dr$$

dS est bien l'aire d'un rectangle de largeur dr et de longueur 2π r = périmètre du cercle de rayon r. On obtient ce petit rectangle en déroulant l'aire hachurée.

Vous allez dire que dérouler une couronne de cercle n'a jamais donné un rectangle. Cela tend vers un rectangle dans la limite des dr petits, c'est-à-dire dans la limite où nous travaillons.

D'ailleurs nous pouvons nous convaincre du bien-fondé de la méthode en terminant le calcul de l'aire S du cercle. Il reste à faire pour cela la somme de couronnes de rayons r, c'est à dire intégrer dS sur la variable r entre 0 et R:

$$S = \int_{r=0}^{r=R} 2\pi\, r\, dr = \pi R^2$$

ce qui est bien l'aire du cercle de rayon R.

En coordonnées polaires, la densité surfacique σ(r,θ) est une fonction de r et de θ. Dans certains cas particuliers, elle n'est fonction que de θ. Dans des cas plus particuliers encore, elle ne dépend d'aucune de ces variables et est uniforme.

Par un raisonnement tout à fait similaire à celui que nous avons suivi pour les coordonnées rectangulaires, nous avons:

$$Q = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \int_{r=0}^{r=R} \sigma(r,\theta)\; r\; dr = \int_{r=0}^{r=R} r\; dr \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \sigma(r,\theta)\, d\theta$$

On peut intégrer dans l'ordre que l'on veut. Ce n'est pas très compliqué, il faut juste un peu de pratique.

<u>V-5 Exemple de charge portée par un disque</u>

Considérons un cercle de rayon R chargé avec une densité de charge $\sigma(r,\theta) = A\, r \cos^2\theta$. Ce n'est pas une densité de charge très habituelle. Elle est d'autant plus grande que l'on s'éloigne du centre 0 du cercle et que l'on se rapproche de l'axe 0x. Disons qu'elle est inventée pour illustrer le calcul de σ.

Représenter un cercle et y porter des charges dont la densité varie en r $\cos^2\theta$

$$Q = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \int_{r=0}^{r=R} A\, r^2 \cos^2\theta\; dr = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} A\, \frac{R^3}{3} \cos^2\theta\, d\theta = A\, \frac{\pi R^3}{3}$$

Faire en détail le calcul ci-dessus. Les tables donnent:

$$\int \cos^2 u\; du = \frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4}$$

Reprendre le calcul en intégrant d'abord sur θ.

VI Potentiel électrique créé par une surface

VI-1 Expression générale

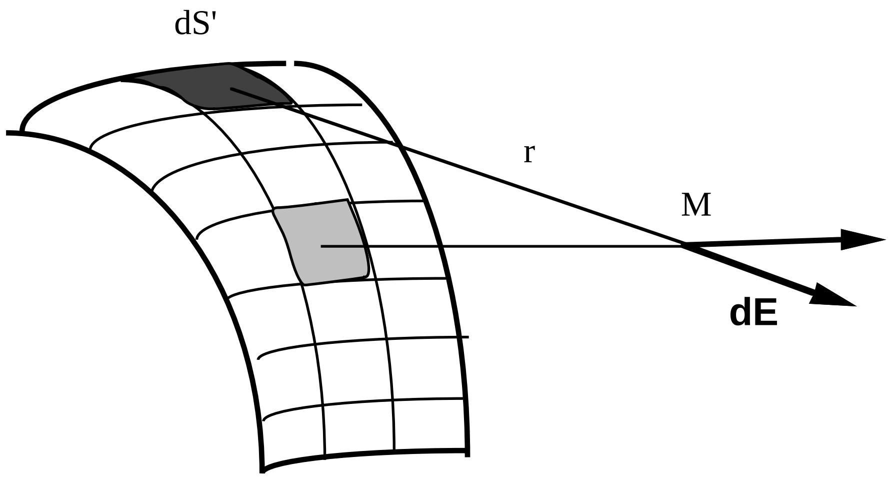
Un élément de surface dS' portant une charge $d^2q = \sigma\, dS'$ placé à la distance r du point M produit en ce point une contribution au potentiel:

$$d^2 V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\, dS'}{r}$$

nous avons représenté deux éléments dS'.

Le potentiel total créé en M est la somme de toutes les contributions élémentaires et s'écrit formellement:

$$\boxed{V_M = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint \frac{\sigma\, dS'}{r}}$$



où les deux signes intégral signifient qu' il faut faire une intégrale double. Il s'agit d'un calcul souvent difficile puisque les éléments de surface ne sont pas en général sur un même plan.

Il faut paramétrer l'élément de surface (c'est-à-dire l'exprimer en fonction de variables), exprimer r et σ en fonction de ces paramètres puis intégrer sur ces paramètres.

VI-2 Expression du potentiel créé par un rectangle chargé

Considérons le rectangle ABCD placé dans le plan (y0z), chargé avec une densité de charge surfacique dont la valeur dépend des paramètres naturels du problème y' et z' (ici x'=0)

Un élément de surface dS'= dy' dz' localisé au point (y',z') porte une charge élémentaire dq= σ(y',z') dy' dz'. Cet élément de surface est placé à une distance r (y',z') d'un point M (x,y,z) dont on veut connaître le potentiel. r s'exprime en fonction de y et z selon la relation:

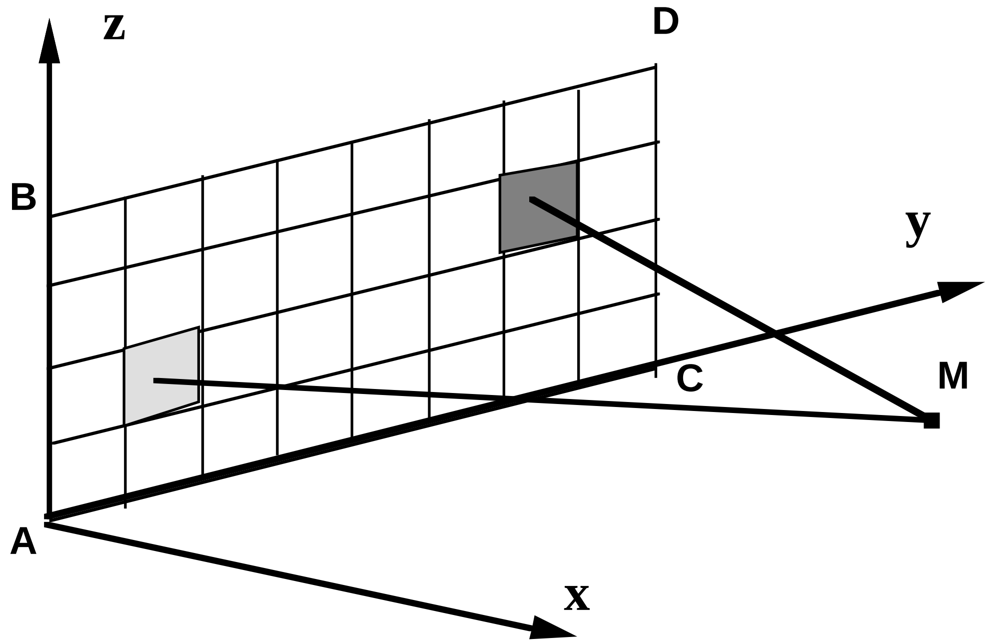
$$r(y',z') = \sqrt{(x)^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

L'élément de potentiel en x, y, z s'écrit:

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma(y',z')\quad dy'\, dz'}{\sqrt{x_M^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}$$

et le potentiel total en M:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{y'=y_A}^{y'=y_C} \int_{z'=z_A}^{z'=z_B} \frac{\sigma(y',z')\ dy'\ dz'}{\sqrt{x^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}$$



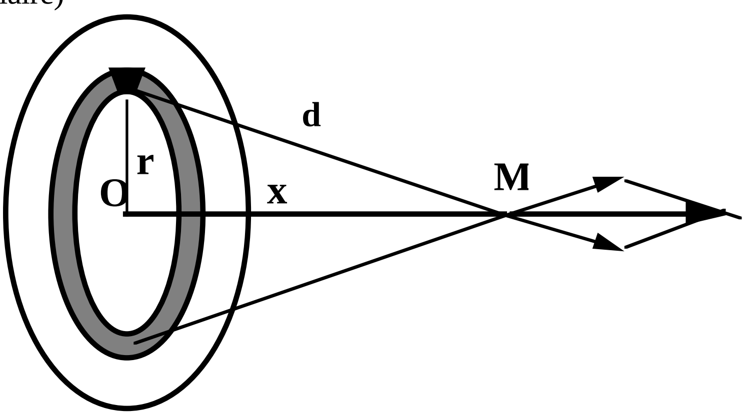
Le calcul peut être plus ou moins complexe mais il est en principe faisable.

VI-3 Potentiel créé par un disque en un point son l'axe

Les coordonnées naturelles d'un disque chargé sont les coordonnées polaires. Un élément de surface du disque rdr dθ placé en (r,θ) (élément en noir) porte une charge $d^2q = \sigma(r,\theta)$ rdr dθ. Il est placé à la distance $d = (r^2 + x^2)^{1/2}$ du point M. Sa contribution au potentiel est donc:

$$d^2 V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sigma(r, \theta)\ r\ dr\ d\theta}{\sqrt{x^2 + r^2}}$$

(Nous notons d la distance entre l'élément de charge et le point M (au lieu de l'habituel r) pour éviter toute confusion avec le rayon r de la couronne élémentaire choisie sur l'objet circulaire)



Reste à intégrer en θ (entre 0 et 2π) pour avoir la contribution au potentiel due à la couronne en gris de rayon r et d'épaisseur dr. Puis en r (entre 0 et R) pour avoir la contribution de toutes les couronnes, c'est-à-dire la contribution totale.

VI-4 Potentiel créé par un disque uniformément chargé, en un point de son l'axe

Si le disque est uniformément chargé, $\sigma(r,\theta) = \sigma_0$:

$$V = \frac{\sigma_0}{4 \pi \varepsilon_0} \int_{r=0}^{r=R} \frac{r\, dr}{\sqrt{x^2 + r^2}} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta = \frac{2\pi\ \sigma_0}{4 \pi \varepsilon_0} \int_{r=0}^{r=R} \frac{r\, dr}{\sqrt{x^2 + r^2}}$$

(on peut intégrer directement en q avec comme résultat 2π lorsque σ ne dépend que de la variable r)

En utilisant la relation

$$\int \frac{u\, du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \sqrt{u^2 + a^2}$$

on arrive très facilement à :

$$V = \frac{\sigma}{2 \varepsilon_0} \left(\sqrt{R^2 + x^2} - |x| \right)$$

Faire le calcul en détail, c'est un cas classique.

VII Champ électrique créé par une surface

VII-1 Calcul à partir du potentiel

Vous pouvez reprendre mot à mot le paragraphe consacré au calcul du champ électrique créé par un fil à partir du potentiel. Ici aussi, nous tirerons au maximum avantage des symétries du problème.

Calculer le champ électrique créé en un point M de l'axe d'un disque uniformément chargé.

VII-2 Expression formelle

De façon tout à fait similaire à ce que nous avons fait pour le calcul direct du champ électrique créé par un fil chargé, nous pouvons écrire formellement le champ électrique créé par une surface chargée.

Chaque élément de surface dS', de charge surfacique σ, placé à la distance r de M et dont la direction le joignant à M est repérée par le vecteur unitaire **u,** apporte une contribution $d^2\mathbf{E}$ au champ électrique:

$$d^2\mathbf{E} = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{\sigma\ dS'}{r^2}\ \mathbf{u}$$

Le champ électrique total s'écrit:

$$\boxed{\mathbf{E_M} = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \iint_S \frac{\sigma\ dS'}{r^2}\ \mathbf{u}}$$

Le champ électrique total est la somme sur toute la surface S des champs électriques élémentaires créés par les éléments de surface dS' portant des charges $d^2q = \sigma$ dS'

Cette relation se décompose en trois nouvelles relations valables pour chacune des composantes:

$$E_x = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \iint_S \frac{\sigma \; dS'}{r^2} \; u_x$$

Comme précédemment pour le potentiel, il est possible d'effectuer le calcul de E_x en paramètrant σ, r, u_x et dS' à l'aide de coordonnées cartésiennes, polaires, cylindriques ou sphériques.

Calculer par méthode directe le champ produit en un point M de l'axe d'un disque chargé uniformément.

<u>VIII Densité de charge volumique</u>

<u>VIII-1 Distribution de charge volumique</u>

Si un solide de volume τ' porte une charge Q uniformément répartie, la densité de charge volumique est $\rho = Q / \tau'$.

Quelle est la densité de charges volumiques dans une sphère de 1cm^3 uniformément chargée portant 10^{-6}C?

Dans le cas général, la charge n'est pas uniforme et la densité volumique $\rho(\mathbf{r'})$ dépend du point **r'** que l'on considère. L'élément de charge dans le volume dτ' localisé autour du point **r'** est $d^3q= \rho(\mathbf{r'})\, d\tau'$.

<u>VIII-2 Distribution de charges volumiques en coordonnées cartésienne</u>

En coordonnées cartésiennes, un élément de volume s'écrit:

$$d\tau' = dx'\, dy'\, dz'$$

La densité de charge ρ(x',y',z') est fonction de x', y' et z:'

L'élément de charge contenu dans un volume dτ' entourant le point **r'** est:

$$d^3q = \rho(x',y',z')\, dx'\, dy'\, dz'$$

La charge totale Q est une intégrale triple sur les trois variables, prises dans l'ordre que l'on veut. Elle s'écrit:

$$Q = \iiint_{\tau'} \rho\,(x',y',z')\, dx'\, dy'\, dz'$$

τ' figurant en bas du signe intégral signifie que l'intégration porte sur tout le volume du solide.

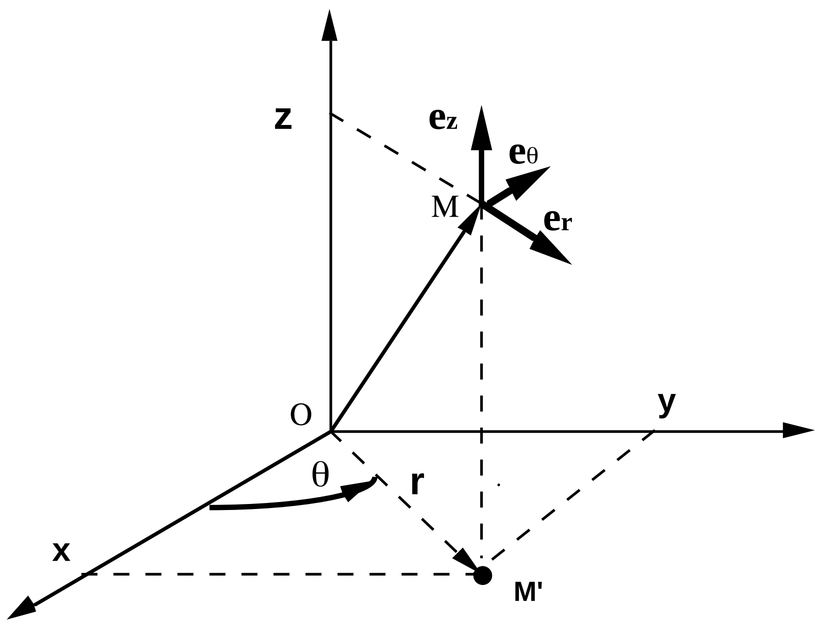
Déterminer la charge électrique portée par un cube de côté a centré à l'origine des axes et dont la densité de charge volumique s'écrit $\rho(x',y',z')'= A(x'^2+y'^2+z'^2)$

<u>VIII-3 Distribution de charges volumiques en coordonnées cylindriques.</u>

Comme leur nom l'indique, les coordonnées cylindriques sont particulièrement bien adaptées à un solide cylindrique de rayon R et de hauteur H.

Dans un tel repère, l'élément de volume s'écrit dr rdq dz. Ce n'est pas immédiat à voir ni à représenter. Pour bien vous en persuader, il n'y a pas de secret, il faut représenter plusieurs fois vous-mêmes cet élément de volume.

Reprenons le trièdre en coordonnées cylindriques:
L'élément de volume $d\tau$ est un parallélépipède dont les axes sont selon $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ et $\mathbf{e}_z$.



Passer de r à r+dr (à θ et z constants) déplace le point M de dr le long de $\mathbf{e}_r$. dr est le premier coté du parallélépipède élémentaire.

Passer de θ à θ+dθ déplace le point M le long de $\mathbf{e}_\theta$. Le déplacement est de rdθ. rdθ représente le second côté du parallélépipède élémentaire.

Passer de z à z+dz déplace M de dz le long de $\mathbf{e}_z$. dz représente le troisième côté.

L'élément de volume $d\tau$ est donc $d\tau = r dr\, d\theta\, dz$.

Reste à intégrer selon les trois coordonnées, dans l'ordre que l'on veut. L'ordre le plus naturel consiste à intégrer tout d'abord selon θ de 0 à 2π, ce qui génère un volume sous forme de couronne de rayon r (et donc de périmètre 2π r) d'épaisseur dr et de hauteur dz. La deuxième intégration porte, selon r, de 0 à R. Cette intégration génère un disque de rayon R et de hauteur dz. La troisième intégration selon dz génère le cylindre dans son entier.

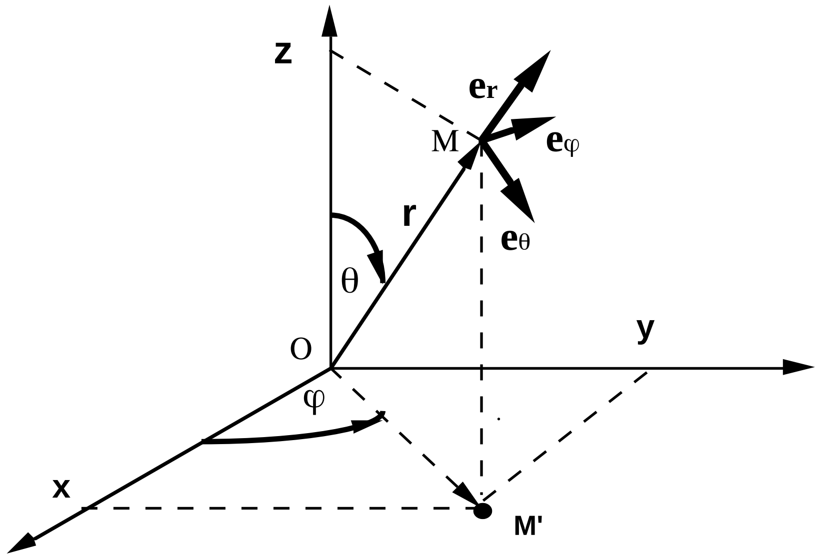
La charge totale est donc:

$$Q = \iiint_\tau \rho\,(r,\theta,z)\; r\, dr\, d\,\theta\; dz$$

Déterminer la charge portée par un cylindre de hauteur H de rayon R, d'axe de révolution 0z, posé sur le plan x0y et dont la densité de charge est ρ(r,θ, z)= A r

VIII-4 Distribution de charges volumiques en coordonnées sphériques

Les coordonnées naturelles d'un corps apparaissant sous forme de sphère sont les coordonnées sphériques. Les coordonnées sont r, θ, φ . L'élément de volume est $d\tau = r^2 dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$. Plus encore ici, vous ne serez convaincus que si vous-mêmes, vous dessinez l'élément de volume $d\tau$ et les volumes engendrés par les intégrations successives.



L'élément de volume $d\tau$ est le parallélépipède rectangle dont les côtés sont selon $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$.

Passer de r à r+dr déplace le point M de dr le long de l'axe $\mathbf{e}_r$. dr est le premier côté du parallélépipède.

Passer de θ à θ+dθ déplace M de r dq dans la direction de $\mathbf{e}_\theta$. r dθ est le second côté du parallélépipède.

Passer de φ à φ+dφ déplace les points M' et M dans la direction $\mathbf{e}_\varphi$ de 0M' dφ. Or 0M'= r sinθ. Le déplacement dans la direction de $\mathbf{e}_\varphi$ est donc r sinθ dφ.

L'élément de volume est :

$$d\tau = r^2\, dr\, \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

L'élément de charge porté par le volume dt situé au voisinage du point de coordonnées (r, θ, φ) s'écrit :

$$d^3 q = \rho\,(r,\theta,\varphi)\; r^2\, dr\; \sin\theta\; d\theta\; d\varphi$$

Et la charge totale s'écrit:

$$Q = \iiint_\tau \rho\,(r,\theta,\varphi)\; r^2\, dr\; \sin\theta\; d\theta\; d\varphi$$

Si on intègre successivement selon φ, θ, r, ce qui est la façon naturelle de procéder:

L'intégration selon φ (de 0 à 2π) engendre une couronne d'axe 0z, située à la cote r cosθ, de rayon r sinθ et dont les deux autres dimensions sont r dθ et dr.

L'intégration selon θ, engendre une couronne sphérique de rayon r et d'épaisseur dr.

L'intégration selon r (de 0 à R) engendre la sphère tout entière.

Représenter les surfaces engendrées successives.

Déterminer par intégrations successives la charge portée par une sphère de rayon R chargée uniformément avec la densité volumique ρ_0.

IX Potentiel et champ créés par un volume chargé.

IX-1 Potentiel électrique

L'élément de volume dt' entourant le point **r'** et portant l'élément de charge $\rho(\mathbf{r'})\, d\tau'$ crée au point M situé en **r** un élément de potentiel d^3V:

$$d^3V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{r'})\, d\tau'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r'}|}$$

Le potentiel total en M est la somme de ces contributions soit:

$$\boxed{V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\tau'} \frac{\rho(\mathbf{r'})\, d\tau'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r'}|}}$$

Comme précédemment, il faut paramétrer chacune des grandeurs et intégrer sur les paramètres. Ce peut être compliqué!!

IX-2 Champ électrique

Il peut être déduit du potentiel par dérivation à l'aide de la relation **E**= -**grad** V.

Alternativement, on peut déterminer l'élément de champ d**E** créé en M par la relation:

$$d^3\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{r'})\, d\tau'}{(\mathbf{r} - \mathbf{r'})^2}\, \mathbf{u}$$

où le vecteur unitaire **u** est porté par la direction joignant l'élément de volume portant la charge dq au point M.

Soit en intégrant sur le volume:

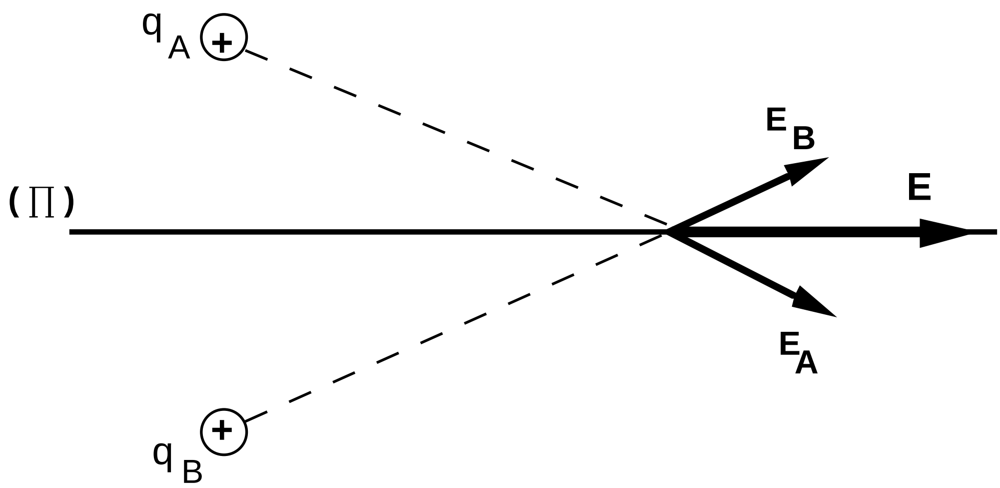
$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\tau'} \frac{\rho(\mathbf{r'})\, d\tau'}{(\mathbf{r} - \mathbf{r'})^2}\, \mathbf{u}}$$

relation valable composante par composante.

X Symétries de distribution de charges et champ électrique

Dans bien des situations, et nous en avons rencontré, des considérations de symétrie permettent de simplifier considérablement les calculs.

La régle de symétrie la plus courante est celle-ci: le champ électrique en un point d'un plan de symétrie de la distribution de charges est un vecteur dont la direction est contenue dans ce plan.



Il est clair sur le schéma ci-dessus que deux charges q_A et q_B égales et symétriques par rapport au plan (∏) produisent des champs électriques $\mathbf{E_A}$ et $\mathbf{E_B}$ symétriques par rapport à ce plan. Leur résultante est située dans le plan de symétrie. En répétant le raisonnement sur toutes les charges symétriques deux à deux, on trouve bien sûr une résultante totale de champ électrique contenue dans le plan.

Si un point est situé à l'intersection de deux plans de symétrie de la distribution de charge, alors le champ électrique est dirigé suivant la droite d'intersection des deux plans.

Si un point est situé à l'intersection de trois plans de symétrie, le champ électrique en ce point est nul.

X Ce qu'il faut savoir

Ce chapitre est long et sans doute difficile.

Il vous faudra un certain temps pour bien voir dans l'espace les éléments de volume, et les formes engendrées par les différentes intégrations.

Mais vous devez arriver à manipuler ces méthodes d'intégration, non seulement parce qu'elles apparaissent en électricité, mais parce que vous les rencontrerez dans différentes autres matières telles que la mécanique.