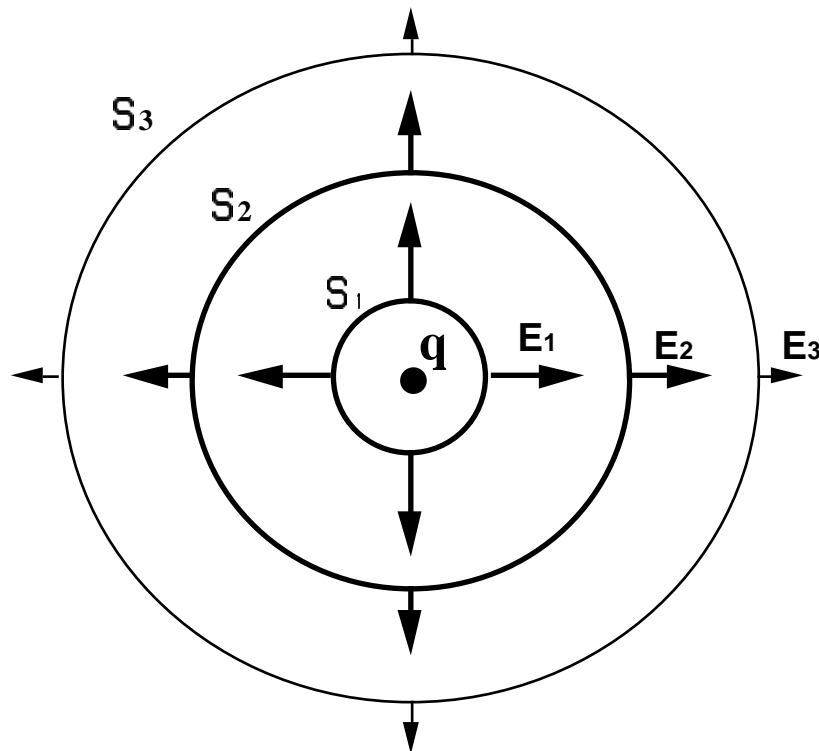


Flux du champ électrique et théorème de Gauss

I) Enoncé du théorème de Gauss

I-1 Cas particulier du théorème de Gauss

Considérons une charge q placée en O . Traçons trois sphères $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$ concentriques de centre O de rayon r_1, r_2 et r_3 .



En tout point de la sphère \mathcal{S}_1 , le champ électrique E_1 est dirigé perpendiculairement à la surface de la sphère. Son intensité est donnée par la loi de Coulomb:

$$E_1 = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q}{r_1^2}$$

On vérifie aisément que le produit de la surface $S_1 = 4 \pi r_1^2$ de la sphère \mathcal{S}_1 par le champ électrique $E_1 = E(r_1)$ est égal à la constante q/ϵ_0 et ne dépend pas de r_1 . Le même raisonnement peut être reproduit sur les sphères \mathcal{S}_2 et \mathcal{S}_3 .

Le produit du champ électrique créé en un point M par une charge ponctuelle placée en O , et de la surface de la sphère de rayon OM , est une constante q/ϵ_0 , indépendante du point M considéré.

Ceci est un cas particulier d'un théorème plus général qu'on appelle théorème de Gauss.

La raison de la constance de ce produit tient de toute évidence au fait que la surface de la sphère croît comme OM^2 alors que le champ électrique en un point de cette sphère décroît comme $1/OM^2$.

I-2 Enoncé général du théorème de Gauss

Dans toute sa généralité, le théorème de Gauss s'énonce ainsi:

Le flux total du champ électrique sortant d'une surface imaginaire fermée est égal à la somme des charges intérieures divisée par ϵ_0 .

Ce théorème doit vous laisser un peu perplexes.

En relisant le paragraphe précédent, vous devez penser que le flux était le produit de la surface de la sphère imaginaire par le champ électrique en chaque point de cette surface. C'est vrai dans le cas particulier considéré.

Vous vous dites peut-être encore que, pour que cet énoncé soit valable aussi bien pour les charges négatives que pour les charges positives, le signe du flux doit changer avec celui de la charge. Pour cette raison, on décide que le flux est positif lorsque le champ électrique est dirigé vers l'extérieur de la sphère et qu'il est négatif si le champ électrique est dirigé vers l'intérieur. C'est une convention.

En fait, ce théorème ne parle pas de sphère; il ne parle que de surface fermée. Il ne précise pas la position de la charge, il ne dit pas non plus si la charge est ponctuelle, étendue ou même s'il y a plusieurs charges. Il ne parle que de charges intérieures à la surface fermée.

Il ne fait nullement allusion aux charges extérieures à la surface fermée.

Ce théorème sépare les charges en deux groupes: celles qui sont intérieures à la surface fermée et celles qui lui sont extérieures.

Tout cela mérite précision. C'est l'objet de ce chapitre

I-3 Modèle

Nous allons montrer la validité du théorème de Gauss en raisonnant sur un système physique imagé que nous appellerons du "tireur fou" et qui possède bien des aspects du champ électrique.

Le système physique à partir duquel nous allons raisonner n'est toutefois pas un champ électrique et il ne présente donc pas toutes ses caractéristiques. Pour cette raison, il faudra rester prudent.

Mais sur les aspects qui nous intéressent, les choses sont plus "matérielles" et donc plus faciles à appréhender.

En fait nous avons hésité à développer cette image de "tireur fou" parce qu'une telle image risque toujours de compliquer les choses plutôt que de les simplifier.

Nous n'y avons finalement pas renoncé pour deux raisons:

i) Il vous faut apprendre à aborder des problèmes par transposition. Dans votre vie professionnelle, vous serez amenés à transférer des modes de raisonnement et des résultats d'un sujet à l'autre ou d'un problème à l'autre. La comparaison que nous allons développer est un apprentissage au décloisonnement.

ii) Le modèle que nous allons mettre en oeuvre fait apparaître les choses sous un aspect de bilan. Dans votre formation d'ingénieur matériaux, vous aurez souvent à effectuer de tels bilans.

Alors tentons cette comparaison. Avec un peu de recul, vous nous direz si nous avons compliqué les choses ou si nous avons aidé à comprendre le théorème de Gauss. Au vu de vos appréciations, nous rectifierons (pour les prochaines années) notre façon de présenter ce problème géométriquement délicat.

II La charge électrique et le tireur fou

II-1 Le modèle du tireur fou

Imaginons qu'une charge électrique placée à l'origine 0 soit émettrice de projectiles.

Disons que c'est un tireur fou qui mitraille sans discernement dans toutes les directions de l'espace et émet un nombre Q_T de projectiles par seconde.

Un tireur fou émet 100 000 projectiles par seconde. Combien de projectiles un homme "parallélépipédique" de 1.8 m de hauteur, 0.4 m de largeur et 0.25 m d'épaisseur, placé à 100m (puis à 1000m) recevra-t-il (en moyenne) de projectiles par seconde?

II-2 Loi de "Coulomb" du tireur fou

Il est clair que le tireur placé à l'origine affecte chaque point \mathbf{r} de l'espace par le nombre de projectiles qu'on peut y recevoir par seconde.

Chaque point $M(\mathbf{r})$ de l'espace peut être caractérisé par le nombre de projectiles $E_{TF}(\mathbf{r})$ qu'une surface unité test $s_0=1m^2$ placée en ce point, bien perpendiculairement au faisceau de projectiles, reçoit par seconde (la surface test est toujours placée perpendiculairement au sens de déplacement des projectiles).

Si le tireur fou émet isotropiquement Q_{TF} projectiles par seconde, le nombre E_{TF} de projectiles reçus par la surface test placée en \mathbf{r} est égal à $Q_{TF} s_0/4\pi r^2$:

$$E_{TF} = \frac{s_0}{4 \pi r^2} Q_{TF}$$

$s_0/4\pi r^2$ est la fraction de surface de la sphère de rayon r couverte par la surface test.

Cette relation n'est pas sans rappeler la formule du champ électrique créé par une charge ponctuelle.

Poussons encore un peu la comparaison. Remplaçons s_0 par $t_0=1/s_0$ et faisons de E_{TF} un vecteur qui, outre le nombre de projectiles reçus par seconde sur la surface test, indique le sens de déplacement des projectiles.

Pour cela, introduisons le vecteur unitaire \mathbf{u} dont le sens est le sens de déplacement des projectiles. E_{TF} s'écrit:

$$\mathbf{E}_{TF} = \frac{1}{4 \pi t_0} \frac{Q_{TF}}{r^2} \mathbf{u}$$

Ce vecteur ressemble alors comme un frère au vecteur champ électrique. Il possède ses deux caractéristiques essentielles: il est radial et décroît en $1/r^2$.

Ainsi, même s'ils n'ont pas la même signification physique, le champ électrique \mathbf{E} et le vecteur \mathbf{E}_{TF} sont mathématiquement identiques: les propriétés mathématiques de l'un seront les propriétés mathématiques de l'autre. C'est ce que nous allons mettre à profit.

III Théorème de Gauss du tireur fou

III-1 Définition du flux de projectiles

Considérons un élément de surface dS appartenant à une surface imaginaire fermée S . Nous définissons l'élément de flux $d^2\phi_{TF}$ de \mathbf{E}_{TF} à travers dS comme le nombre de projectiles que reçoit cette surface pendant 1 seconde.

dS n'est pas la surface test et n'est donc pas nécessairement placée perpendiculairement à la direction de déplacement des projectiles.

Le nombre de projectiles reçus va donc dépendre de la position de l'élément de surface dS mais aussi de son orientation.

Si l'élément de surface dS est parfaitement perpendiculaire à la trajectoire des projectiles:

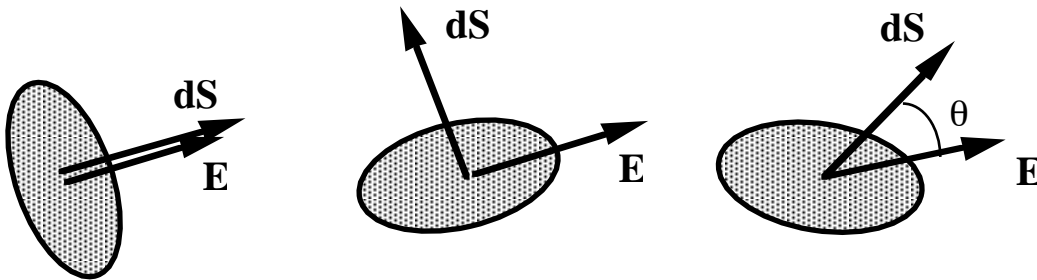
$$d\phi_{TF} = E_{TF} dS$$

Si au contraire l'élément de surface dS se présente de profil, il ne reçoit aucun projectile et $d\phi_{TF} = 0$ ($d\phi_{TF}$ est un infiniment petit du second ordre).

Il paraît clair que la grandeur à prendre en compte n'est pas l'élément de surface dS mais sa projection sur le plan perpendiculaire au faisceau de projectile. L'élément de flux est alors:

$$d\phi_{TF} = E_{TF} dS \cos\theta$$

où θ est l'angle entre un vecteur perpendiculaire à dS et la direction des projectiles.



Dans quelle situation géométrique le flux de E est-il le plus élevé.

Cette relation peut en fait s'écrire comme un produit scalaire. Pour cela, définissons un élément de surface $d\mathbf{S}$ comme un vecteur dont l'intensité est égale à l'élément d'aire dS , et le sens celui de la normale sortante par rapport à la surface fermée sur laquelle s'appuie l'élément de surface $d\mathbf{S}$. Il vient alors:

$$d\phi = \mathbf{E}_{TF} \cdot d\mathbf{S}$$

Par intégration, le flux à travers la surface fermée est la somme de tous les éléments de flux obtenus lorsque $d\mathbf{S}$ parcourt toute la surface soit:

$$\phi = \iint \mathbf{E}_{TF} \cdot d\mathbf{S}$$

III-2 Flux de projectiles dus à des tireurs fous

Si il y a 3 tireurs fous, chacun fournit son propre \mathbf{E}_{TF} (\mathbf{E}_{TF1} , \mathbf{E}_{TF2} , \mathbf{E}_{TF3}) et le flux total à travers une surface $d\mathbf{S}$ n'est autre que la somme des flux individuels.

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3$$

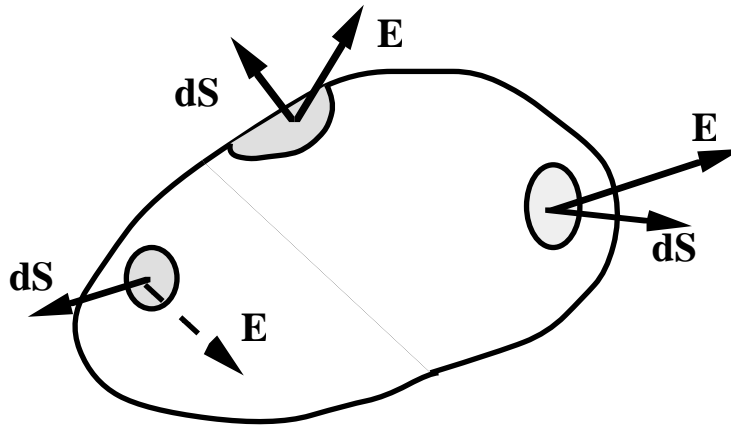
Il est évident que le nombre de projectiles reçus par seconde par $d\mathbf{S}$ est la somme des projectiles provenant de chacun des tireurs.

On peut définir $\mathbf{E}_{TF} = \mathbf{E}_{TF1} + \mathbf{E}_{TF2} + \mathbf{E}_{TF3}$

$$d\phi = \mathbf{E}_{TF} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{E}_{TF1} \cdot d\mathbf{S} + \mathbf{E}_{TF2} \cdot d\mathbf{S} + \mathbf{E}_{TF3} \cdot d\mathbf{S} = d\phi_1 + d\phi_2 + d\phi_3$$

C'est le théorème de superposition du tireur fou.

Comme on peut le voir sur la figure ci-dessous, certains éléments de flux peuvent être positifs alors que d'autres sont négatifs. Tout dépend de la position des tireurs à l'intérieur et à l'extérieur de la surface fermée.



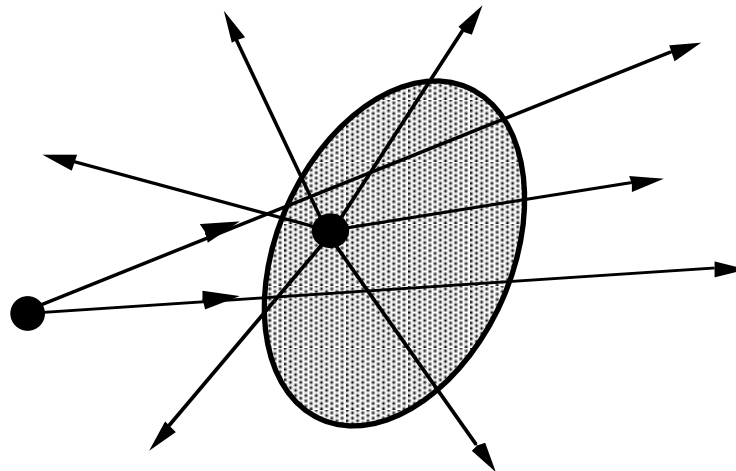
III-3 Equation bilan

Le flux total ϕ est égal au nombre de projectiles qui quittent le volume délimité par la surface totale S pendant 1 seconde.

Il est bien clair que ce nombre est égal au nombre de projectiles émis depuis l'ensemble des points sources intérieurs à la surface.

En régime stationnaire, le nombre de projectiles émis pendant 1 seconde à l'intérieur du volume V délimité par la surface S doit être égal au nombre de projectiles qui quittent ce volume et donc franchissent la surface S dans le sens sortant.

S'il y a en outre des tireurs extérieurs, les projectiles qu'ils émettent ne font que passer. En 1 seconde, ils sont autant à pénétrer dans le volume qu'à en sortir. Le flux dû à ces projectiles tirés de l'extérieur est localement positif, localement négatif mais globalement nul.



Si la distribution des tireurs fous n'est pas très simple, l'expression des éléments de flux $\mathbf{E}_{TF} \cdot d\mathbf{S}$ doit être assez inextricable. Mais le bilan global doit être inchangé et la somme sur toute la surface fermée des $\mathbf{E}_{TF} \cdot d\mathbf{S}$ est égale à $Q_{TF,i}/t_0$, où $Q_{TF,i}$ est le nombre de projectiles émis par seconde à l'intérieur de la surface fermée.

III-4 Résultat mathématique:

Oublions l'image des tireurs fous et la notion de déplacement qui est associée aux projectiles qu'ils émettent. Et ne retenons que l'aspect mathématique.

Nous avons montré par des arguments physiques que, si à un point source O , on faisait correspondre en chaque point de l'espace M un vecteur radial $\mathbf{E}_{TF}(\mathbf{r})$ dont l'intensité décroissait comme l'inverse du carré de la distance OM , alors le flux de ce

vecteur à travers une surface imaginaire fermée de forme quelconque entourant 0 était une constante.

Les flux étant des grandeurs scalaires, le flux total créé par une distribution de points sources Q_i est égale à la somme des flux dus à chacun des points sources.

Appliquons ce résultat à l'être mathématique qu'est le champ électrique \mathbf{E} et qui possède les mêmes propriétés mathématiques que \mathbf{E}_{TF} .

On pourrait aussi l'appliquer au champ de gravitation

Formuler le théorème de Gauss du champ de gravitation.

IV Théorème de Gauss du champ électrique

IV-1) Flux du champ électrique

Si dans la notion flux on ressent communément une idée de mouvement, c'est sans doute parce que l'on parle du flux et du reflux de l'eau. C'est aussi parce que les flux que l'on introduit en physique sont souvent ceux de vecteurs auxquels sont associées des déplacements d'objets ou de fluides comme dans l'image du tireur fou.

En fait le flux est une définition mathématique n'impliquant a priori aucun mouvement.

Etant donné un champ de vecteur $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ et un élément de surface orienté $d\mathbf{S}$ placé en \mathbf{r} , un élément de flux $d\phi$ est défini par:

$$d\phi = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$$

Le flux total à travers une surface fermée est égal à la somme de ces éléments de flux.

Le champ électrique est un champ de vecteur et, comme tel, des éléments de flux lui sont associés.

Mais, vous voyez, nous sommes incorrigibles puisque, pour nous convaincre des propriétés du flux du champ électrique nous avons fait appel au champ de vecteur \mathbf{E}_{TF} auquel est associée l'idée de mouvement.

IV-2 Théorème de Gauss

Le flux total du champ électrique sortant d'une surface fermée est égal à la somme des charges intérieures divisée par ϵ_0 . C'est une simple transposition de théorème de Gauss du tireur fou.

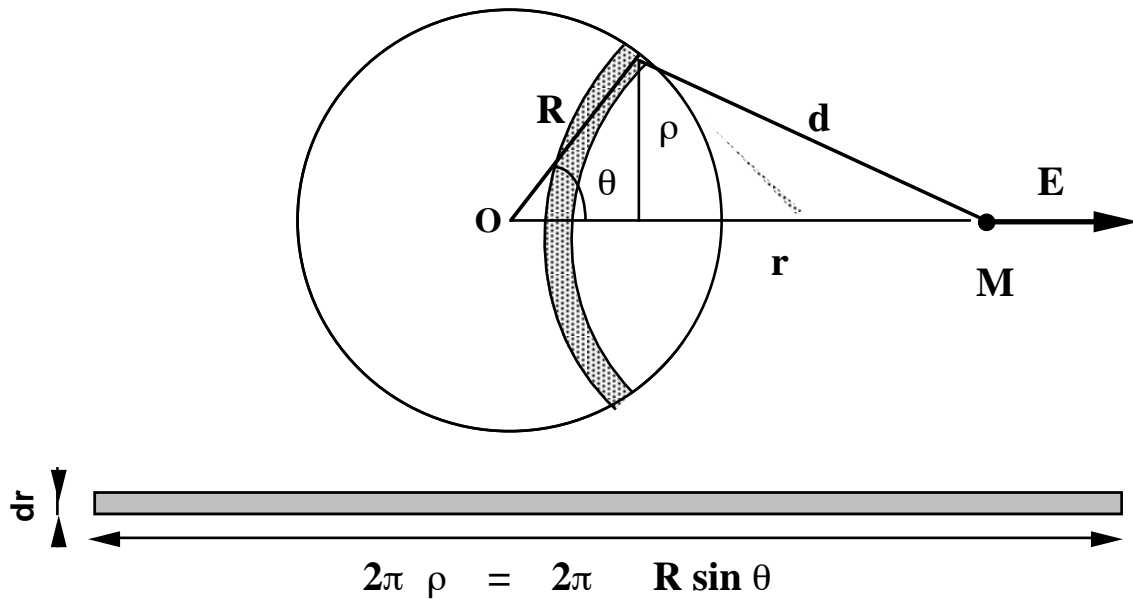
Nous espérons que ce théorème vous laisse moins perplexes. Si vous n'êtes pas vraiment convaincu par notre démarche, consultez le livre de R. Feynmann, ou le cours de Berkeley: vous y trouverez des approches complémentaires.

Nous allons maintenant nous tourner vers l'utilisation de ce théorème.

V Application à certains calculs de champ électrique

V-1 Calcul direct du champ électrique créé par une sphère chargée uniformément en surface

Considérons une sphère de rayon R , centrée en 0, chargée en surface avec une densité de charge uniforme σ et essayons de déterminer le champ électrique qu'elle crée en un point \mathbf{r} de l'espace.



Sur la figure ci-dessus, l'ensemble des points de la sphère situés à la distance d du point M décrit un cercle de rayon $\rho = R \sin \theta$.

L'ensemble des points d'une couronne de sphère, d'aire $2\pi R \sin \theta R d\theta$ ($R d\theta$ est la largeur de la couronne), porte un élément charge:

$$dq = \sigma 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$$

Ces points sont situés à la distance d de M telle que:

$$d^2 = r^2 + R^2 - 2Rr \cos \theta$$

Une telle couronne contribue au potentiel V par l'élément dV :

$$dV = \frac{\sigma}{4\pi \epsilon_0} \frac{2\pi R^2 \sin \theta d\theta}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta}}$$

Le potentiel total est la somme (intégrale) sur les θ de 0 à π de l'expression ci-dessus:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{\sigma 2\pi R^2 \sin \theta d\theta}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta}}$$

Le champ électrique est dirigé suivant la direction Ox et s'obtient par dérivation du potentiel ainsi calculé.

Par symétrie de rotation, le champ électrique peut être déterminé en un point quelconque de l'espace

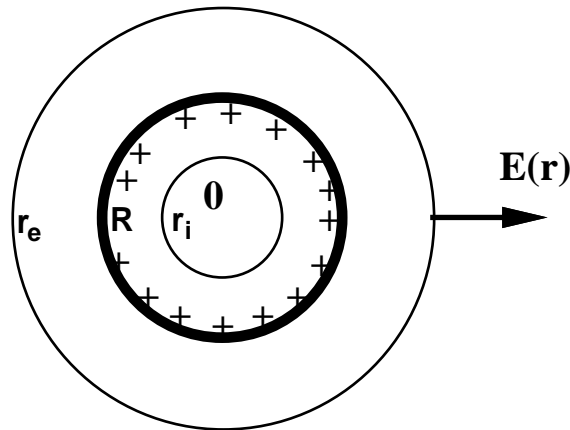
Ce calcul est faisable. On peut imaginer qu'il vous effraie.

V-2 Application du théorème de Gauss

En fait, ce champ électrique peut être calculé simplement par application du théorème de Gauss.

Nous avons tracé sur la figure ci-après trois sphères, de rayon R , r_i et r_e .

La sphère de rayon R est la sphère physique, chargée en surface avec la densité de charge σ .



Les sphères r_i et r_e sont deux sphères imaginaires appelées aussi sphère de Gauss qui sont des surfaces fermées sur lesquelles on va appliquer le théorème de Gauss. Les indices i et e viennent rappeler qu'elles sont respectivement intérieures et extérieures à la sphère chargée.

Remarquons maintenant que, par symétrie, le champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ en tout point distant de r du point 0 (r plus grand ou plus petit que R) est radial et ne dépend que de r .

Son flux ϕ à travers une sphère de Gauss de rayon r s'écrit donc simplement $\phi = 4\pi r^2 E(r)$. Il est égal à Q_i/ϵ_0 où Q_i est la charge intérieure à la sphère de rayon r .

Deux cas se présentent:

i) $r = r_i < R$

Il n'y a pas de charges intérieures à la surface de Gauss, $Q_i = 0$ et donc $E(r_i) = 0$.

Le champ électrique à l'intérieur de la sphère chargée uniformément en surface est nul.

ii) $r = r_e > R$

La charge totale $Q_i = \sigma 4\pi R^2$ se trouve à l'intérieur de la sphère de rayon r_e . Le théorème nous dit que:

$$\phi = 4\pi r_e^2 E(r_e) = \frac{4\pi \sigma R^2}{\epsilon_0}$$

Soit:

$$E(r_e) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r_e^2}$$

Le champ électrique à l'extérieur de la sphère est identique à celui qui serait créé par une charge ponctuelle Q_i placée au centre de celle-ci.

Si nous étions allés jusqu'au bout du calcul du paragraphe précédent, c'est ce que nous aurions trouvé, ... mais à quel prix !!

Tracer le profil du champ électrique $E(r)$ en fonction de r . Quelle discontinuité subit-il lors du franchissement de la surface de la sphère?

V-3 Conditions d'applications du théorème de Gauss

Il faut bien voir que si le théorème de Gauss est d'une grande généralité, il n'est utilisable en pratique que si le système présente un degré de symétrie élevé. C'est parce que le champ électrique était toujours normal à la surface de la sphère de rayon r et qu'il était a priori d'intensité constante que l'expression du flux fut particulièrement simple et utilisable.

Dans la pratique, il faut pouvoir définir une surface de Gauss fermée sur laquelle le champ électrique est constant et radial, ou non constant mais tangentiel.

V-4 Champ électrique créé par un fil infini chargé uniformément

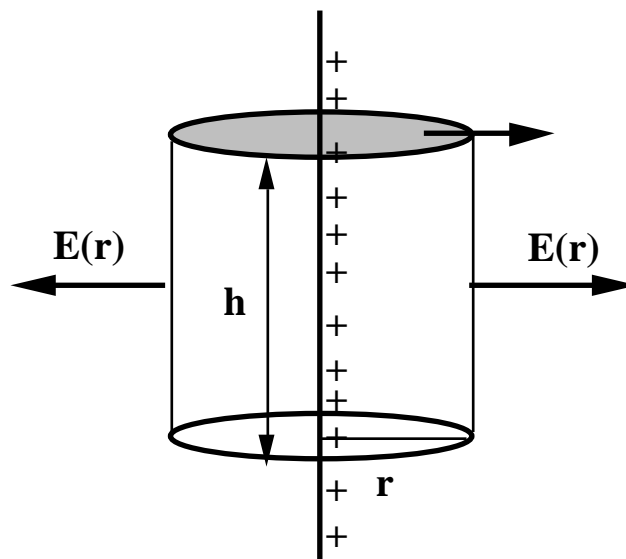
Un calcul direct peut être effectué comme au chapitre précédent mais utilisons plutôt le théorème de Gauss.

Par symétrie, le champ électrique en tout point r est radial et orthogonal à l'axe du fil.

Considérons la surface de Gauss constituée d'un tronc cylindrique droit de rayon r de hauteur h , et des deux disques de rayon r couvrant ses extrémités.

A cette surface fermée appliquons le théorème de Gauss.

La charge intérieure à cette surface est égale à $Q_i = \lambda h$.



Le flux de \mathbf{E} à travers la surface fermée peut être décomposé en trois contributions:

Le flux de \mathbf{E} à travers le disque supérieur, le flux de \mathbf{E} à travers le disque inférieur et le flux de \mathbf{E} à travers le tronc cylindrique.

Les flux de \mathbf{E} à travers les disques sont nuls car le champ électrique leur est tangent.

Le flux de \mathbf{E} à travers la surface du tronc de cylindre est simplement égal à $2\pi r h E(r)$. ($E(r)$ est constamment perpendiculaire à la surface.

Le théorème de Gauss s'écrit:

$$\phi = 2\pi r h E(r) = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

soit:

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r}$$

Le champ électrique créé par un fil infini, uniformément chargé, décroît en $1/r$.

V-5 Quand peut-on considérer un fil comme infini?

Un fil sera considéré comme infini si la distance r entre l'observateur (placé suffisamment loin des extrémités du fil) et le fil est beaucoup plus petite que la longueur du fil, c'est-à-dire lorsque $r \ll a$.

Dans le chapitre précédent (paragraphe IV-3) nous avons montré que le champ électrique radial en un point du plan bissecteur du fil uniformément chargé était radial et s'écrivait (vous remplacerez aisément les notations dans leur contexte):

$$E(r) = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 r} \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}}$$

La limite $r \ll a$ s'obtient en négligeant r^2 devant a^2 dans la racine carrée. Soit:

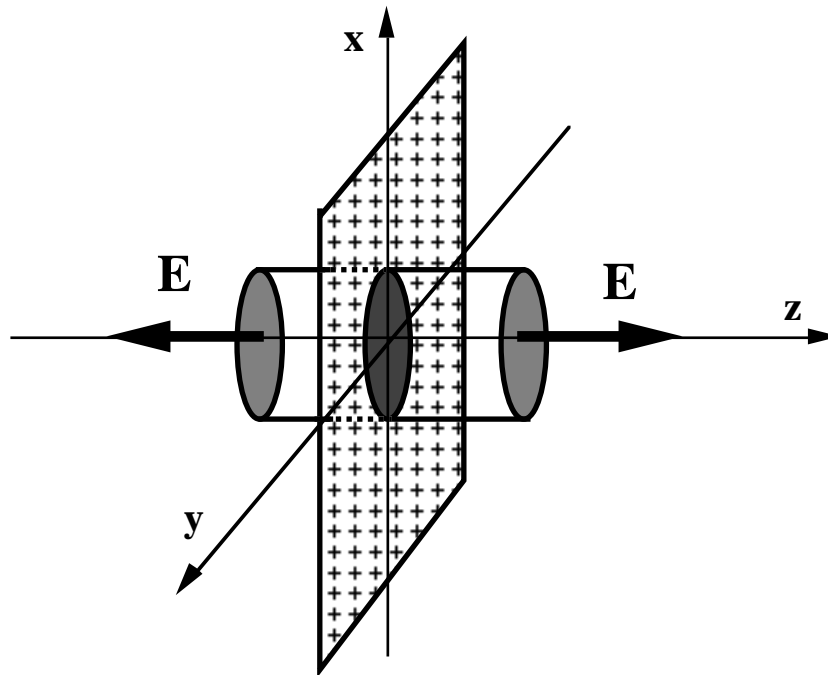
$$E(r) = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 r} \frac{1}{a} = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0 r}$$

ce qui est exactement l'expression trouvée par le théorème de Gauss.

VI) Franchissement d'une surface chargée

VI-1 Champ créé par un plan infini chargé uniformément

Considérons le plan xOy chargé uniformément avec la densité de charge σ . Déterminons le champ électrique créé à la distance z de ce plan.



Par symétrie, le champ électrique est dirigé suivant Oz , vers les z positifs ou négatifs selon que l'on se trouve à droite ou à gauche du plan chargé.

Considérons la surface de Gauss fermée constituée d'un cylindre d'axe $z'z$ fermé par les deux disques hachurés de surface S placés de part et d'autre du plan chargé aux cotes $+z$ et $-z$.

Le champ électrique est tangent au cylindre et perpendiculaire aux deux disques hachurés.

Le flux de E à travers la surface fermée se compose du flux à travers le cylindre, du flux à travers le disque de droite et du flux à travers le disque de gauche.

Le flux à travers le cylindre est manifestement nul puisque le champ électrique est tangentiel à ce cylindre.

Le flux à travers le disque de droite est $S E(z)$. Il est positif puisque dirigé suivant la normale sortante.

Le flux à travers le disque de gauche est $S E(-z) = S E(z)$. Il est aussi positif puisque à la fois le champ et la normale sortante ont changé de sens.

L'égalité entre $E(z)$ et $E(-z)$ est due à la symétrie.

Le flux total à travers la surface fermée est donc:

$$\phi = 2 S E(z)$$

La charge Q_i à l'intérieure de cette surface fermée est celle portée par le disque central de la figure précédente, soit:

$$Q_i = S \sigma_0$$

L'application du théorème de Gauss donne:

$$E(z) = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0}$$

Le champ $E(z)$ est indépendant de la cote z .

Toutes les positions situées à distance finie d'un plan infini sont équivalentes.

VI-2 Discontinuité du champ électrique lors de la traversée d'une surface chargée

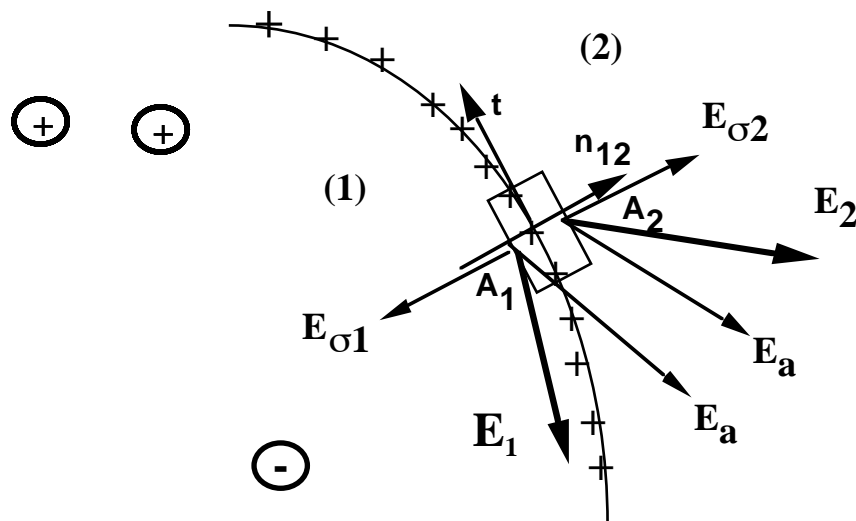
Nous allons utiliser le résultat ci-dessus pour déterminer la modification du champ électrique lors de la traversée d'une surface chargée. Nous voulons connaître la différence de champ électrique entre deux points A_1 et A_2 infiniment proches situés de part et d'autre de cette surface.

Pour ce faire, nous nous appuyons sur deux arguments:

- Un élément rectangulaire de plan, de longueur a et de largeur b finies, peut être considéré comme infini si la distance d séparant l'observateur du plan chargé est suffisamment petite. ($d \ll a$ et b)

- Une surface quelconque de rayon de courbure r_c , peut localement être considérée comme plane par un observateur qui se trouve à une distance $d \ll r_c$ (c'est la vision que l'on a de la terre à proximité du sol).

Cela signifie qu'un élément de surface quelconque portant localement une densité de charge σ crée en son voisinage immédiat ($d \ll r_c$) un champ électrique $\sigma/2\epsilon_0$ normal à la surface.



En présence d'autres charges, les champs électriques totaux \mathbf{E}_1 et \mathbf{E}_2 en des points A_1 et A_2 très proches de la surface est alors la somme de deux composantes:

-Le champ \mathbf{E}_σ dû aux charges de surface ($\sigma/2\epsilon_0$).

-Le champ \mathbf{E}_a dû aux autres charges situées très loin comparée à la distance qui sépare les points A_1 et A_2 :

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_a + \mathbf{E}_{\sigma 1} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_a + \mathbf{E}_{\sigma 2}$$

Le franchissement de la surface n'affecte pas \mathbf{E}_a qui est créé par des charges "éloignées". La distance infime qui sépare deux points situés de part et d'autre de la surface ne conduit à aucune modification de \mathbf{E}_a . C'est pour cela que le même \mathbf{E}_a apparaît dans \mathbf{E}_1 et \mathbf{E}_2 .

Au vu du paragraphe précédent, les champs \mathbf{E}_σ sont égaux, opposés et perpendiculaires à la surface (et n'ont pas de composante tangentielle suivant \mathbf{t}). Il est assez évident que si on définit \mathbf{n}_{12} le vecteur unitaire perpendiculaire à la surface et dirigé dans le sens du milieu (1) vers le milieu (2), on a la relation algébrique $(\mathbf{E}_{\sigma 2} - \mathbf{E}_{\sigma 1}) \cdot \mathbf{n}_{12} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. Et donc puisque seule la composante E_σ est différente:

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{n}_{12} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Il s'en suit que lors de la traversée d'une surface chargée:

- La composante tangentielle du champ électrique total est continue $E_{t1} = E_{t2}$

- la composante normale subit une discontinuité $E_{n2} - E_{n1} = \sigma/\epsilon_0$

avec $E_{t1} = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{t}$ $E_{t2} = \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{t}$ $E_{n1} = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{n}_{12}$ $E_{n2} = \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{n}_{12}$

VII) Forme locale du théorème de Gauss

VII-1 Equation globale et forme locale

Le théorème de Gauss, tel que nous l'avons présenté, est apparu sous une forme globale. Le flux à travers une surface fermée est reliée à la quantité de charges intérieures à ce volume indépendamment du détail de leur distribution .

Une équation locale relie deux grandeurs en un point \mathbf{r} .

$\mathbf{E} = -\text{grad}V$ est une équation locale en ce sens que le champ en \mathbf{r} est lié à la dérivée du potentiel en ce même point \mathbf{r} .

Il existe une forme locale du théorème de Gauss. Elle s'écrit:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Elle relie, en chaque point de l'espace, la somme des trois dérivées partielles écrites ci-dessus à la densité de charge volumique en ce même point.

(Les charges surfaciques et ponctuelles doivent être traitées à part.)

Un vecteur \mathbf{E} étant donné, on a pris l'habitude de noter:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

La forme locale du théorème de Gauss s'écrit alors:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

La divergence (div) d'un vecteur est un scalaire. Cet être mathématique vient rejoindre le gradient et le rotationnel dans ce que l'on appelle l'analyse vectorielle.

Dans le vide, $\rho = 0$ et $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$

Comme le gradient et le rotationnel, la divergence présente une expression en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.

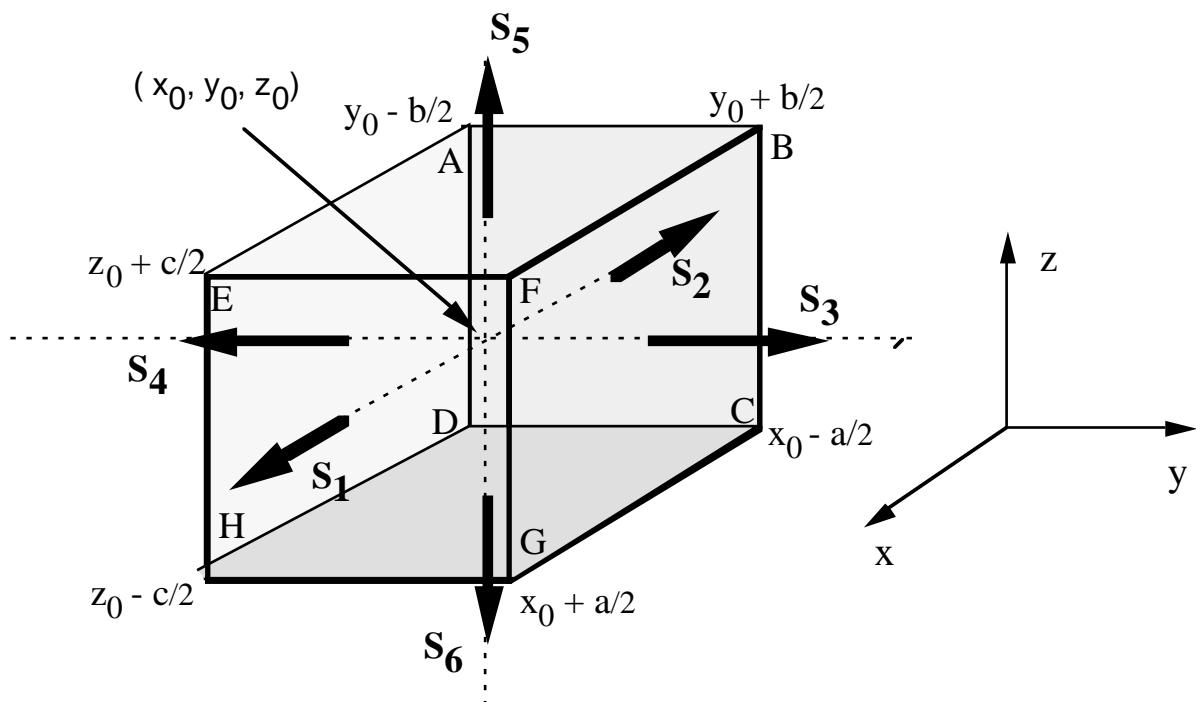
VII-2 Bilan sur un volume élémentaire

Considérons un petit parallélépipède rectangle centré en un point d'abscisse x_0, y_0, z_0 et de côtés a, b et c .

Les deux faces perpendiculaires à la direction Ox sont situées en $x = x_0 - a/2$ et $x = x_0 + a/2$. Les côtés de ces faces sont b (parallèlement à Oy) et c (parallèlement à Oz). L'aire de ces deux faces est égale au produit bc .

Reproduire le même raisonnement pour les autres faces.

L'ensemble des 6 rectangles (tels que ABCD) forme une surface fermée entourant le volume $V = abc$ du parallélépipède rectangle.



Les vecteurs $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3, \mathbf{S}_4, \mathbf{S}_5, \mathbf{S}_6$ représentant les surfaces des rectangles sont orientés vers l'extérieur du volume et s'écrivent:

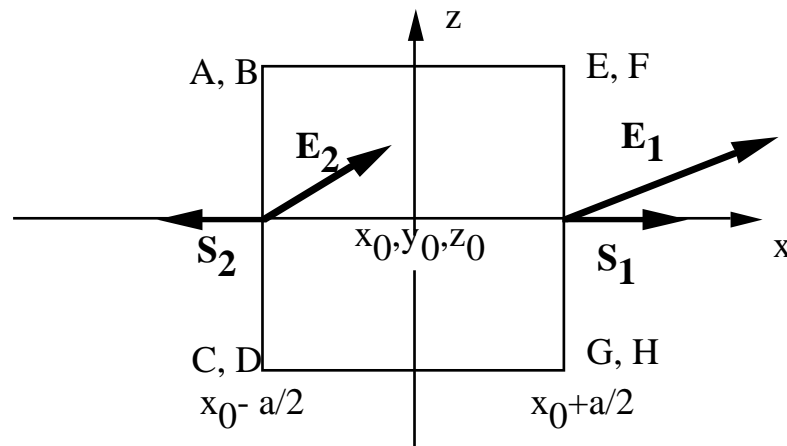
$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} bc \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} -bc \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ ac \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -ac \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ab \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -ab \end{bmatrix}$$

Le flux total de \mathbf{E} à travers la surface parallélépipédique fermée s'écrit:

$$\phi = (\mathbf{E}_1 \mathbf{S}_1 + \mathbf{E}_2 \mathbf{S}_2) + (\mathbf{E}_3 \mathbf{S}_3 + \mathbf{E}_4 \mathbf{S}_4) + (\mathbf{E}_5 \mathbf{S}_5 + \mathbf{E}_6 \mathbf{S}_6) = \phi_{12} + \phi_{34} + \phi_{56}$$

Déterminons ϕ_{12} , c'est-à-dire la somme des flux du champ électrique à travers les surfaces \mathbf{S}_1 et \mathbf{S}_2 . Pour cela, faisons figurer ces deux surfaces de profil.

\mathbf{E}_1 est le champ électrique \mathbf{E} en $x_0 + a/2$. $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}(x_0 + a/2, y_0, z_0)$



Puisque bc est l'aire du rectangle $ABCD$, et au vu de l'orientation de \mathbf{S}_1 qui n'a de composante que suivant l'axe $0x$, le flux de \mathbf{E} à travers la surface \mathbf{S}_1 s'écrit: $(-bc) E_x(x_0 - a/2, y_0, z_0)$. Nous avons donc:

$$\begin{aligned} \phi_{12} &= (bc) E_x(x_0 + a/2, y_0, z_0) + (-bc) E_x(x_0 - a/2, y_0, z_0) \\ &= (bc) [E_x(x_0 + a/2, y_0, z_0) - E_x(x_0 - a/2, y_0, z_0)] \end{aligned}$$

Puisque a est très petit et tend vers 0, on peut faire un développement limité autour de x_0, y_0, z_0 :

$$\begin{aligned} E_x(x_0 + a/2, y_0, z_0) &= E_x(x_0, y_0, z_0) + \left(\frac{\partial E_x}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \right) \left(\frac{+a}{2} \right) \\ E_x(x_0 - a/2, y_0, z_0) &= E_x(x_0, y_0, z_0) + \left(\frac{\partial E_x}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \right) \left(\frac{-a}{2} \right) \end{aligned}$$

d'où:

$$\phi_{12} = a b c \frac{\partial E_x}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$$

où le produit abc n'est autre que le volume V du parallélépipède rectangle.

Les flux ϕ_{34} et ϕ_{56} peuvent être calculés de la même façon, ce qui conduit à:

$$\phi = V \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right)$$

où les dérivées partielles sont à prendre en (x_0, y_0, z_0)

La charge à l'intérieur du volume est la densité locale de charge $\rho(x_0, y_0, z_0)$ multipliée par le volume du parallélépipède: $Q_i = \rho V$.

L'application du théorème de Gauss donne:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

C'est la forme locale de ce théorème que nous annonçons au paragraphe précédent:

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

VIII Equation de Poisson

La combinaison de la forme locale du théorème de Gauss $\text{div } \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ et de la relation $\mathbf{E} = -\text{grad } V$ conduit à l'équation de Poisson.

En effet:

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = - \frac{\partial \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)}{\partial y} - \frac{\partial \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

entraîne:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

ce qui est l'équation de Poisson. Elle se synthétise en:

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

où:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Est un nouvel être d'analyse vectorielle appelé laplacien scalaire.

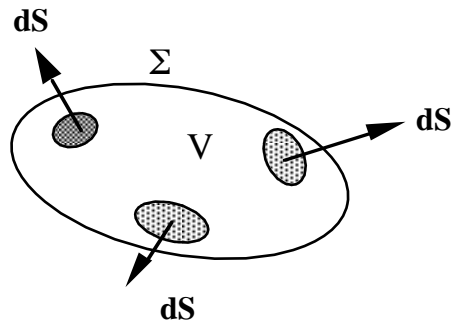
IX Relation de Green-Ostrogradsky

IX-1 Enoncé général

Nous avons montré ci-dessus que le flux de \mathbf{E} à travers la surface (orientée normale sortante) qui délimite un petit cube est égale à la divergence de \mathbf{E} multipliée par le volume de ce cube.

Ceci se généralise à toute surface fermée et à tout vecteur \mathbf{U} .

Soit \mathbf{U} un champ de vecteur, Σ une surface fermée dont les éléments de surface dS sont orientés dans le sens de la normale sortante, V le volume délimité par la surface fermée.



On a de façon générale:

$$\iiint_{\Sigma} \mathbf{U} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \text{div } \mathbf{U} \, d\tau$$

VIII-2 Exemple

L'application de ce théorème sur un volume quelconque et pour un champ de vecteur non trivial est très vite compliquée.

Nous nous contenterons de le vérifier sur un champ radial de composante:

$$a_x = x \quad a_y = y \quad a_z = z$$

et pour un volume délimité par une sphère de rayon R centrée à l'origine.

\mathbf{a} est un vecteur radial de norme r. $\text{div } \mathbf{a}$ vaut 3 en tout point de l'espace. Le flux de \mathbf{a} à travers la sphère de rayon R est donc:

$$R \times 4 \pi R^2 = 4 \pi R^3$$

L'intégrale de la divergence de \mathbf{a} dans la sphère est:

$$3 \times \frac{4}{3} \pi R^3 = 4 \pi R^3$$

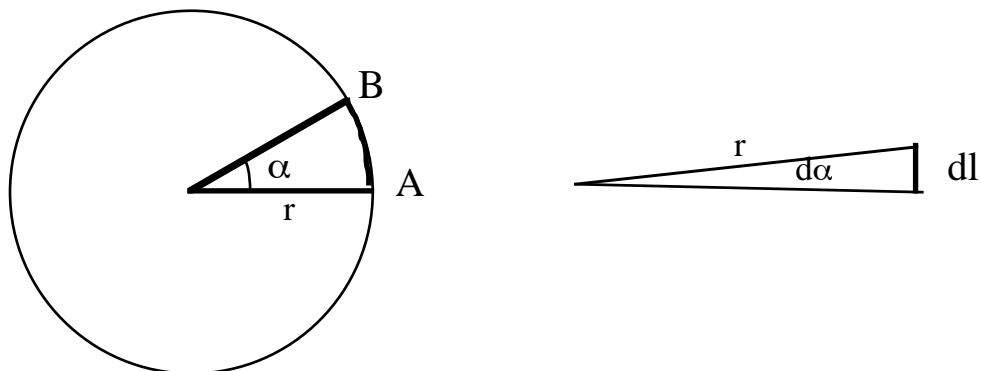
X Notion d'angle solide

X-1 Angle du plan

Considérons le centre O d'un cercle de rayon r.

Soit un arc de cercle de longueur AB. (AB est l'arc, qu'il ne faut pas confondre avec la corde)

La mesure de l'angle α est en radian: $\alpha = AB/r$



L'angle α peut être défini à partir d'un cercle de rayon $2r$. Dans ce cas, l'arc intercepté est de longueur double et la mesure de α est inchangée. L'angle α est une entité en soi indépendante du cercle qui a servi à en déterminer la mesure.

Vous pouvez découper dans le plan d'une feuille de papier un angle α . Vous visez une région du plan en plaçant votre oeil au sommet de l'angle et en regardant la région délimitée par les deux demi-droites qui définissent l'angle.

La fraction des directions que vous voyez, rapportée à 2π , est la valeur de l'angle.

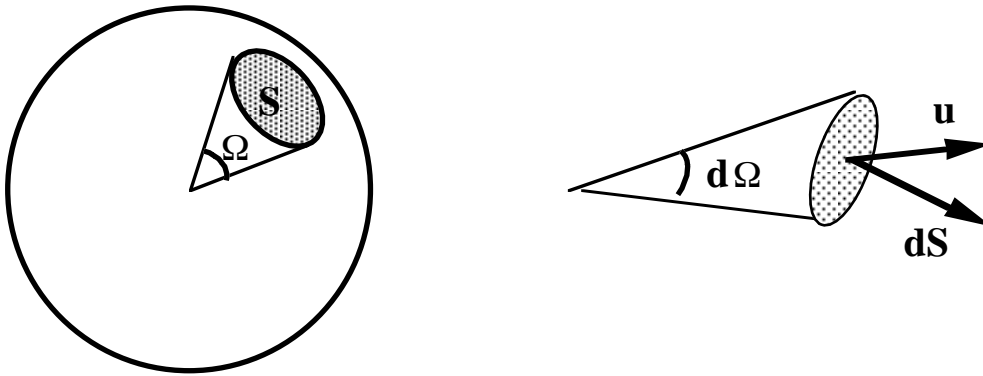
Un élément d'angle $d\alpha$ est simplement défini par dl/r

La somme des éléments d'angle qui permettent de viser le plan tout entier est 2π .

X-2 Angle solide

Prenez maintenant une feuille de papier et enroulez-la en formant un cône.

Si vous visez par le petit trou placé à la pointe de ce cône, vous avez une vision d'une fraction des directions de l'espace un peu comme avec l'angle vous aviez une vision d'une portion du plan.



Vous pouvez déformer ce cône en appuyant sur ses côtés et vous avez une vision d'une fraction différente de l'espace.

La fraction des directions de l'espace que vous apercevez, rapportée à 4π est ce que l'on appelle l'angle solide.

Pour déterminer la valeur d'un angle solide Ω , traçons une sphère de centre O et de rayon r . La surface du cercle interceptée par le cône est S . La division de S par r^2 est la valeur de l'angle solide Ω .

L'angle solide est sans dimension. On dit qu'il est en stéradian. Le stéradian vient se substituer au radian de l'angle d'un plan.

La valeur maximale de l'angle solide est 4π .

L'angle solide $d\Omega$ sous lequel un élément de surface dS est vu depuis le point O est :

$$d\Omega = \frac{\mathbf{dS} \cdot \mathbf{u}}{r^2}$$

où \mathbf{u} est le vecteur unitaire porté par le segment de droite joignant le point O à l'élément de surface dS .

X-3 Relation entre le flux et l'angle solide

Le champ électrique créé en \mathbf{r} par une charge q située au point O s'écrit:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \frac{\mathbf{u}}{r^2}$$

L'élément de flux $d\phi$ à travers l'élément de surface $d\mathbf{S}$ placé au point \mathbf{r} s'écrit:

$$d\phi = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \frac{\mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}}{r^2} = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} d\Omega$$

Le flux total du champ électrique à travers une surface S de forme quelconque, s'obtient en découpant cette surface en éléments $d\mathbf{S}$ et en intégrant sur les éléments d'angle solide. Il vient alors:

$$\phi = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \Omega$$

Le flux du champ électrique créé par une charge ponctuelle à travers une surface quelconque est égal à $q/4 \pi \epsilon_0$ multiplié par l'angle solide sous lequel on voit cette surface depuis le point O .

Si la surface est fermée et entoure la charge q , l'angle solide est 4π et le flux est q/ϵ_0 .

Si la surface fermée n'entoure pas la charge q , l'angle solide est 0 (bien faire attention aux signes des éléments de surface $d\mathbf{S}$ suivant la normale sortante au point considéré) et le flux est nul.

C'est le théorème de Gauss.