CHAPITRE V

Travail des forces électriques

Energie électrostatique

I Travail des forces électriques

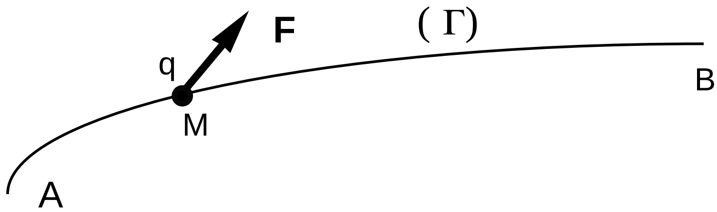
I-1 Problème

Considérons une distribution de charges. Cette distribution de charges crée en chaque point de l'espace un champ électrique **E(r)** et un potentiel V(r).

Plaçons en un point M(**r**) une charge q. Il s'applique sur cette charge une force **F(r)** = q **E**(**r**)

Déplaçons la charge du point A au point B le long d'une ligne (Γ).

Le déplacement de la charge s'accompagne du déplacement du point d'application de la force **F**(**r**) et donc d'un travail de la force électrique.



Questions:

i) Quelle est la valeur du travail de la force électrique lors de son déplacement de A en B?

ii) Ce travail dépend-il du chemin suivi?

I-2 Réponse

La réponse à de telles questions passe généralement par une succession de considérations et de démonstrations.

Ici, la réponse est tellement simple que nous la donnons d'emblée. Nous gardons les considérations pour la suite.

Réponse

ii) le travail effectué par la force électrique lors de son déplacement de A à B ne dépend pas du chemin suivi.

i) le travail W de la force électrique est égal à $q(V_A-V_B)$, c'est-à-dire au produit de la charge q multipliée par la différence de potentiel (V_A-V_B) entre les points A (origine) et B (extrémité).

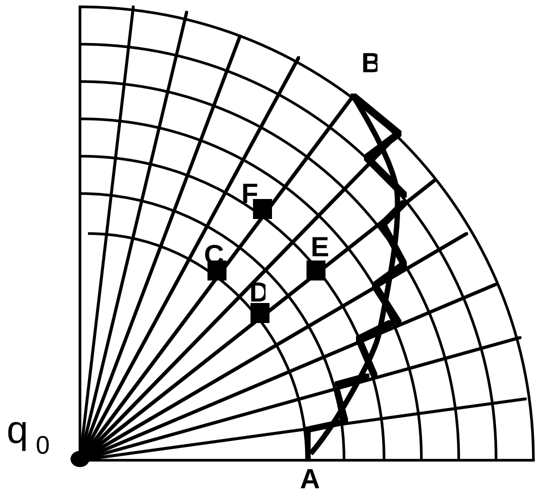
Soit $q_0 = 1\mu C$ une charge placée à l'origine et $q= 2\mu C$ une seconde charge placée en A(2,0,0). Déterminer le travail de la force exercée sur q lors du déplacement de cette charge de A à B (0,3,0) (unité de longueur: 1 cm).

I-3 Travail de la force électrique sur un chemin simple

Considérons le système électrique constitué d'une charge centrale q_0 placée à l'origine. Cette charge crée dans l'espace un champ **E** et un potentiel V dont nous avons étudié les caractéristiques dans les chapitres précédents.

Nous introduisons une nouvelle charge q sur laquelle s'exerce la force **F(r)** = q **E(r)**

Calculons le travail W effectué par la force **F** lors d'un déplacement de la charge q du point A au point B, en suivant le chemin composé de l'arc de cercle AC centré en 0, suivi du segment radial CB.



Le long de AC, la force est toujours perpendiculaire au déplacement et donc le travail effectué par cette force est nul.

A l'opposé, sur le segment de droite CB, la force se trouve toujours parallèle au déplacement. L'élément de travail δW effectué par la force F(r) lors d'un déplacement radial de r à r+dr est :

$$\delta W = F(r)\, dr$$

Le travail total est la somme des travaux élémentaires. Il est obtenu par intégration sur la variable r, soit:

$$W = \int_{r_c}^{r_b} F(r)\, dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_c}^{r_b} \frac{q\, q_0}{r^2}\, dr$$

Puisque 1/r2 est la dérivée de -1/r, ce travail s'écrit:

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{q\ q_0}{r}\right]_{r_A}^{r_B} = \frac{q\ q_0}{4\pi\varepsilon_0 r_A} - \frac{q\ q_0}{4\pi\varepsilon_0 r_B} = q\,(V_A - V_B)$$

(il a été tenu compte du fait que $r_A = r_c$ et $V_A = V_C$)

ce qui est l'expression du travail que nous avons annoncée.

I-4 Autres chemins

Plutôt que de suivre ACB, suivons maintenant le chemin ADEFB.

AD et EF sont des arcs de cercle sur lesquels le travail est nul. Les points A,D et E,F sont au même potentiel: V_A-V_D , V_E-V_F.

DE et FB sont des chemins radiaux sur lesquels on peut reproduire le calcul du paragraphe précédent.

$$\text{soit : } W = q\,(V_D - V_E) + q\,(V_F - V_B) = q\,(V_A - V_B)$$

Pour aller de A à B, on peut imaginer bien d'autres chemins qui sont une succession d'arcs de cercles et de segments radiaux.

On peut aussi dire qu'un chemin quelconque menant de A à B (tel que celui représenté en trait épais sur le schéma) peut être approché avec une précision aussi grande que l'on veut par une succession d'arcs de cercle et de chemin radiaux. Dans tous les cas le travail vaut $W = q\,(V_A - V_B)$.

<u>I-5 Généralisation à une distribution de charge</u>

Soit un système électrique formé de deux charges q_1 et q_2 placées en 0_1 et 0_2. Déterminons le travail résultant du déplacement d'une charge q dans le champ créé par q_1 et q_2.

En vertu du théorème de superposition, la force totale appliquée sur q s'écrit:

$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{E} = q\,\mathbf{E_1} + q\,\mathbf{E_2} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2}$$

où $\mathbf{E_1}$ et $\mathbf{E_2}$ sont les champs créés indépendamment par les q_1 et q_2 si elles étaient seules.

Les travaux des forces $\mathbf{F_1}$ et $\mathbf{F_2}$ lors de leurs déplacements de A à B s'écrivent:

$$W_1 = q\,(V_{1A} - V_{1B}) \qquad W_2 = q\,(V_{2A} - V_{2B})$$

où V1 et V2 sont les potentiels dus séparément à q_1 et q_2.

Or, lors d'un déplacement **l**, le travail d'une force **F**: W= **F l** est égal à la somme des travaux de ses composantes $\mathbf{F_1 l} + \mathbf{F_2 l} = W_1 + W_2$ (distributivité du produit scalaire).Il s'ensuit:

$$W = q\,[\,(V_{1A} + V_{2A}) - (V_{1B} + V_{2B})]$$

soit par application du théorème de superposition sur les potentiels, $V = V_1 + V_2$:

$$W = q\,(V_A - V_B)$$

<u>I-6 Lignes de champ et équipotentielles</u>

En suivant les arcs de cercle et les chemins radiaux, nous avons en fait suivi une succession d'équipotentielles et de lignes de champ.

Le long d'une équipotentielle, le travail est nul car la force parallèle à **E**, est constamment perpendiculaire au déplacement.

Le long d'une ligne de champ, le déplacement est parallèle à la force. L'élément de travail est $\delta W = q\,E\,dl = q\,dV$.

Lorsque le champ électrique est créé par une distribution de charges, les équipotentielles ne sont plus des sphères et les lignes de champ ne sont plus des segments de droites, mais il est toujours possible d'approcher une ligne joignant un point A à un point B par une succession de lignes de champ et d'équipotentielles qui, on le sait, se coupent à angle droit et forment un quadrillage déformé de l'espace.

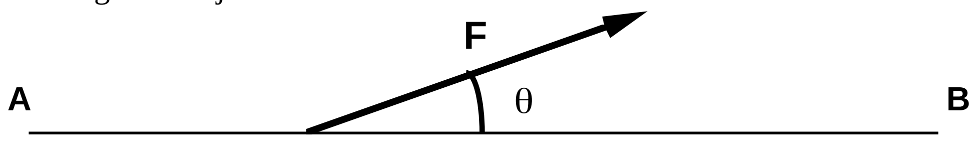
Tracez un réseau imaginaire et compatible de lignes de champ et d'équipotentielles. Montrez que le travail effectué pour joindre un point A à un point B est $W = q(V_A - V_B)$

<u>II Travail et différentielles totales exactes</u>

Nous allons dans ce paragraphe revoir la notion de travail de façon plus générale et examiner dans quelles conditions celui-ci ne dépend que de l'état initial et de l'état final et se trouve indépendant du chemin suivi.

II-1) Travail d'une force constante lors de son déplacement sur une trajectoire rectiligne

Lors d'un déplacement rectiligne de A vers B, le travail d'une force constante **F** (en direction et en intensité) est égal au produit du déplacement AB par la composante de la force le long de la trajectoire.



La composante de la force n'étant autre que F cosθ où θ est l'angle orienté (**F**,**AB**), le travail s'exprime mathématiquement comme le produit scalaire de la force **F** par le vecteur déplacement **AB.**

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{AB} = F\, AB \cos\theta$$

II-2 Travail d'une force non constante lors de son déplacement sur une trajectoire rectiligne.

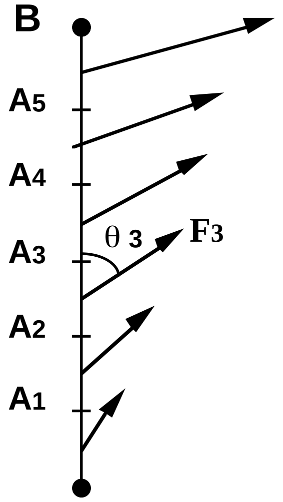
Considérons le cas où la trajectoire AB est toujours rectiligne, mais où la force dépend de la position de son point d'application M. Si l'on suppose que AB est porté par l'axe 0x, M est donné par son abscisse x, l'intensité de la force est une fonction F(x) et l'angle qu'elle fait avec ox est donné par une fonction θ(x).

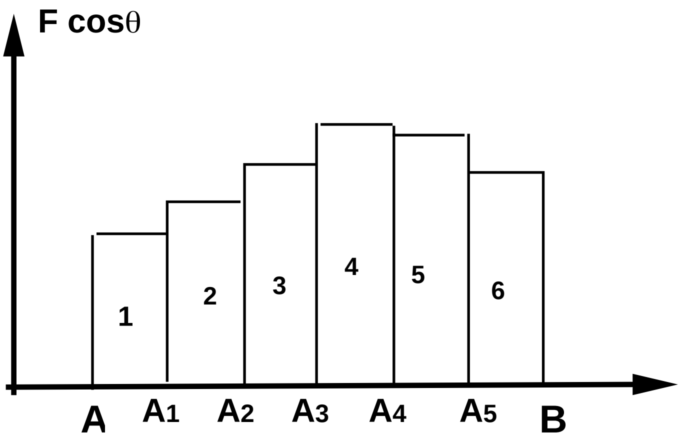
Il ne peut plus être question ici d'utiliser une formule globale telle que celle du paragraphe précédent. Il nous faut découper AB en ségments AA_1, A_1A_2,.. $A_{i-1}A_i$, etc..de taille suffisamment petite pour que l'on puisse considérer que s'exerce le long de chacun d'eux une force **F** constante.

Nous admettrons par exemple que sur le segment délimité par les points $A_{i-1}(x_{i-1})$ et $A_i(x_i)$, la projection de la force sur la trajectoire est égale à :

$$F_i \cos\theta_i = 1/2\,[F(x_{i-1}) \cos \theta(x_{i-1}) + F(x_i) \cos\theta(x_i)]$$

Ainsi, lors du déplacement de A_{i-1} à A_i, le travail exercé par la force électrique est égal à $\Delta W_i = A_{i-1}A_i \cdot F_i \cdot \cos \theta_i$





Il s'ensuit que le travail total de la force électrique lors de son déplacement de A à B est la somme de tous les travaux élémentaires, soit:

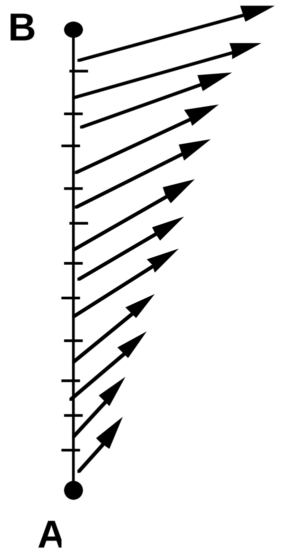
$$W = \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \ A_{i-1}A_i \ \cos\theta_i$$

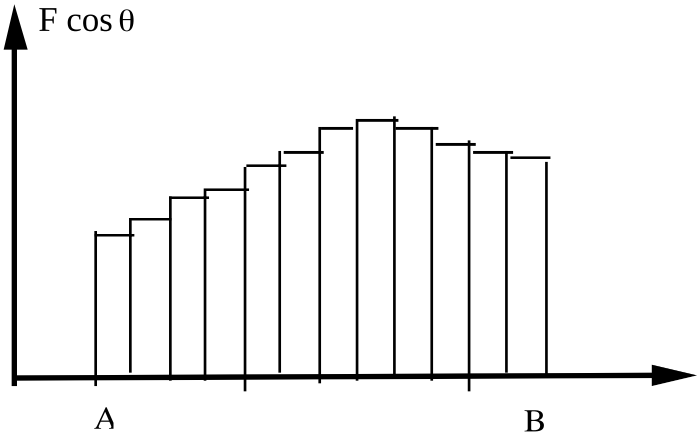
Représentons dans un diagramme de type "histogramme" des petits rectangles indicés 1,2,.. i,...n dont les bases sont égales aux distances $A_{i-1}A_i = \Delta l_i = x_i - x_{i-1}$ et dont les hauteurs sont égales aux produits $F_i \cos\theta_i$.

Dans ce diagramme, l'aire du rectangle i n'est autre que le travail ΔW_i.

Le travail total effectué lors du déplacement de A vers B est la somme de chacune de ces aires, c'est à dire l'aire totale sous la courbe en escalier.

Avec l'affinement du pas, la courbe en escalier se rapproche d'une courbe continue représentée par la fonction $g(x)=F(x)\cos\theta(x)$. Le travail tend vers l'aire hachurée sous cette courbe.





L'élément de travail δW produit par la force **F**(x) lors de son déplacement élémentaire de x à x + dx est égal à:

$$\delta W = F(x)\cos\theta(x)\,dx$$

$$W = \int_{x_A}^{x_B} \delta W = \int_{x_A}^{x_B} F(x)\cos\theta(x)\ dx$$

*Considérons trois points A, B, C et D placés sur un axe ox, aux coordonnées x_A=5m et x_B= 12m et x_C= 120m x_D=0130m. Un mobile soumis à une force **F** se déplace sur l'axe Au point M d'abscisse x, exprimé en mètre; l'intensité de la force est en Newton F(x)=2x et l'angle θ vaut en degrés θ(x) = 30°+2x.*

Déterminer le travail effectué par la force lors du déplacement de A en B, puis de C en D. Montrer à quelles aires correspondent ces travaux.

Notez bien que l'intégration d'une fonction à <u>une</u> variable est a priori faisable. Tout au plus faut-il consulter une table d'intégrales

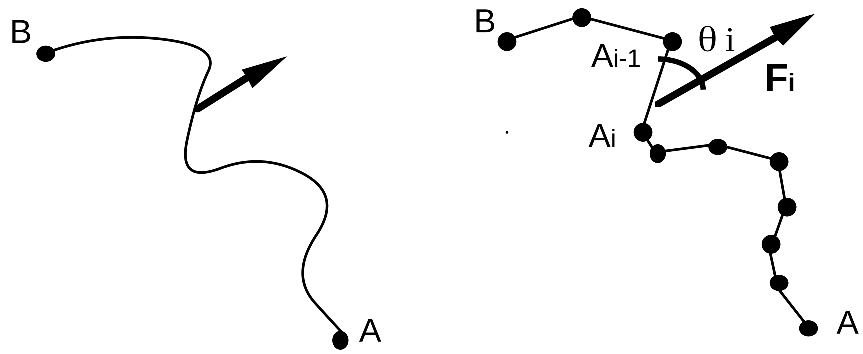
II-3 Cas général, travail d'une force variable se déplaçant sur un chemin curviligne.

Nous avons supposé jusqu'ici que le point M se déplaçait sur un ségment de droite AB.

Dans le cas général le point M décrit une trajectoire curviligne quelconque (Γ). Une origine étant choisie sur la trajectoire, la position de M est repérée par le scalaire l qui indique la distance que doit parcourir un mobile pour joindre 0 à M en suivant la courbe.

Lors du découpage par morceau, la courbe continue est transformée en une ligne brisée joignant les points $A_{i-1}A_i$ de la courbe réelle. L'élément de travail ΔW_i effectué par la force $\mathbf{F_i}$ lors de son déplacement sur le segment $A_{i-1}A_i$ de longueur Δl_i avec lequel elle fait un angle θ_i , est égal à:

$$\Delta W_i = F_i \cos\theta_i \ \Delta l_i$$



Lors du passage à la limite continue, nous dirons que l'élément de travail δW effectué par la force $\mathbf{F}$(l) lors d'un déplacement élémentaire dl est égal à:

$$\delta W = F(l)\ \cos\theta\ (l)\ dl$$

Le travail total de la force lors de son déplacement le long de la ligne Γ est:

$$W = \int_{\Gamma} F(l) \cos\theta(l)\ \ dl$$

Une telle intégrale est appelée intégrale curviligne le long du chemin Γ.

II-4 Expression vectorielle du travail élémentaire

Considérons le vecteur $\mathbf{A_{i-1}A_i}$ joignant les points A_{i-1} et A_i apparus lors de la découpe de la courbe Γ. Appelons ce vecteur $\Delta\ \mathbf{l_i}$. Le travail ΔW_i effectué lors du déplacement $\Delta\ \mathbf{l_i}$ s'écrit aussi:

$$\Delta W_i = \mathbf{F_i} \cdot \Delta\ \mathbf{l_i}$$

Lors du passage à la limite continue $\Delta\mathbf{l}$ devient $\mathbf{dl}$ = $\mathbf{u}$.dl où $\mathbf{u}$ est le vecteur unitaire tangent à la courbe (Γ) au point d'abscisse curviligne l.

L'élément de travail est:

$$\delta W = \mathbf{F}\ \mathbf{dl}$$

Le travail total s'écrit alors:

$$W = \int_{\Gamma} \mathbf{F(l)}\ \ d\mathbf{l}$$

dl est le vecteur infiniment petit joignant deux point M et M' de la trajectoire, infiniment proches de la trajectoire.

II-5 Expression du travail élémentaire dans un repère cartésien

Dans un repère cartésien les vecteurs **F** et **dl** peuvent être exprimés par leurs composantes:

$$\mathbf{F} = \left| \begin{array}{l} F_x \\ F_y \\ F_z \end{array} \right. \qquad d\mathbf{l} = \left| \begin{array}{l} dx \\ dy \\ dz \end{array} \right.$$

Compte tenu de l'expression du produit scalaire, l'élément de travail effectué par la force **F** lors du déplacement d**l** de son point d'application s'écrit:

$$\delta W = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

et le travail total devient:

$$W = \int_\Gamma F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz$$

Insistons encore sur le fait que l'on calcule le travail en suivant la trajectoire (Γ). Si l'on se donne dx, alors dy et dz sont fixés.

W n'est pas la somme de trois intégrales suivant x, y et z. C'est une somme le long du chemin, ce qui nécessite un paramétrage du chemin (Γ).

Considérons dans un repère cartésien trois points A (1,0,0), B(2,0,0) et C(2,1,0). Déterminer les travaux effectués par les forces dont les composantes sont données ci dessous lors des déplacements AB, BC et AC :

i) $F_x = x$, $F_y = y$, $F_z = z$

ii) $F_x = xy$, $F_y = yz$, $F_z = zx$

Le travail dépend-il du chemin suivi?

III Travail et différentielles totales exactes

III-1 Formes différentielles

Soit X(x,y,z) ,Y(x,y,z) et Z(x,y,z) trois fonctions continues des trois variables x,y,z.
On appelle forme différentielle la quantité δg définie par:

$$\delta g = X(x,y,z)\, dx + Y(x,y,z)\, dy + Z(x,y,z)\, dz$$

De telles formes différentielles apparaissent en physique comme des contributions infinitésimales δg à une grandeur g lors de variations élémentaires dx, dy et dz des paramètres x y et z.

Ainsi une contribution élémentaire du travail des forces électriques apparaît comme une forme différentielle.

III-2 Intégrale curviligne

Une intégrale curviligne est la somme des contributions infinitésimales δg accumulées le long d'un chemin (Γ).

Le travail des forces électriques se présente sous forme d'une intégrale curviligne.

Insistons encore sur le fait que, dans le cas général, le calcul d'une telle grandeur implique la connaissance du chemin suivi.

III-3 Cas particulier de forme différentielle: les différentielles totales exactes

La définition d'une forme différentielle n'implique aucune relation entre les fonctions X, Yet Z.

Il est néanmoins un cas particulier très important de forme différentielle: c'est celui où les fonctions X, Y et Z ne sont pas indépendantes les unes des autres mais sont les dérivées partielles d'une même fonction scalaire g:

$$X(x,y,z) = \frac{\partial g}{\partial x} \qquad Y(x,y,z) = \frac{\partial g}{\partial y} \qquad Z(x,y,z) = \frac{\partial g}{\partial z}$$

Alors, dans ce cas particulier, l'intégrale curviligne le long d'un chemin (Γ) menant du point A au point B ne dépend pas du chemin suivi. Elle est égale à la différence des valeurs de g en A et en B. On écrit alors:

$$\int_\Gamma \delta g = \int_A^B dg = g(B) - g(A)$$

La forme différentielle δg se note alors dg (avec un d "droit"). dg s'appelle différentielle de g ou différentielle totale exacte.

Si l'indication du chemin (Γ) est nécessaire pour effectuer la somme d' éléments d'une forme différentielle il devient superflu pour effectuer la somme des éléments d'une différentielle totale exacte. Il suffit de préciser les points de départ et d'arrivée, ce qui rend l'expression proche de celle d'une intégrale.

Si Γ est une boucle fermée qui commence en A et finit au même point A:

$$\oint dg = 0$$

La boucle entourant le signe intégral signifie que le chemin d'intégration est un contour fermé.

En remplaçant X,Y,Z par leur expression en fonction de g, il vient:

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial z} dz$$

Rappel : les dérivées "rondes" $\partial g/\partial x$ sous-entendent que la dérivation s'effectue par rapport à la seule variable x, les autres étant considérées comme des constantes, le temps de la dérivation. Si il y a ambiguïté (en thermodynamique, il y a toujours ambiguïté) il faut écrire:

$$dg = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{y,z} dx + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_{z,x} dy + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)_{y,x} dz$$

Ecrire la différentielle de la fonction $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

III-4 Reconnaître une différentielle totale exacte

Au chapitre II, nous avons calculé les dérivées partielles d'une fonction $g(x,y,z) = 2x^2y^2 - z^2x^2 + xyz$. Si nous les appelons X(x,y,z) , Y(x,y,z) et Z (x,y,z) nous avons:

$$X(x,y,z) = \frac{\partial g}{\partial x} = 4xy^2 - 2z^2x + yz \qquad \text{et} \qquad Y(x,y,z) = \frac{\partial g}{\partial y} = 4x^2y + xz$$

En dérivant X par rapport à y et Y par rapport à x, il vient:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = 8xy + z \qquad \frac{\partial Y}{\partial x} = 8xy + z$$

Nous observons que $\frac{\partial X}{\partial y}$ et $\frac{\partial Y}{\partial x}$ sont égales. Les dérivées secondes partielles par rapport aux mêmes variables x puis y ou y puis x sont égales.

$\frac{\partial X}{\partial y}$ est la dérivée par rapport à y de la dérivée de g par rapport à x . Elle se note:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 g}{\partial x\, \partial y}$$

$$\text{et donc: } \frac{\partial^2 g}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y\, \partial x}$$

En étendant le raisonnement sur les trois fonctions X,Y,Z et les trois composantes x,y,z, on reconnaitra si les fonctions X,Y et Z sont les dérivées partielles d'une même fonction scalaire g si on a à la fois:

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial z} \qquad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x} \qquad \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}$$

Lesquelles de ces formes différentielles sont des différentielles totales exactes:
$\delta g = (x^2+x)\, dx + 2y\, dy + z^{1/2}\, dz$
$\delta g = x^2yz\, dx + x\, y^2z\, dy + xyz^2\, dz$
$\delta g = (x^2+y^2+z^2)\, dx + (x^2+y^2+z^2)\, dy + (x^2+y^2+z^2)\, dz$
$\delta g = (3x2+2y)\, dx + 2x\, dy + 2z\, dz$
Déterminer la fonction g lorsqu'elle existe

III-5 Travail de la force électrique

L'élément de travail de la force électrique s'écrit comme une forme différentielle:

$$\delta W = \mathbf{F}\, d\mathbf{l} = F_x dx + F_y\, dy + F\, dz$$

Or les composantes F_x, F_y et F_z de la force, définie localement à partir du champ électrique **E** selon la relation $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}\,(\mathbf{r})$, sont les dérivées partielles de la fonction scalaire $-qV(\mathbf{r})$. il s'en suit:

$$\delta\, W = dW = -\, q\left[\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz\right]$$

Le travail effectué lors du déplacement de la charge q de A vers B est, quel que soit le chemin suivi:

$$W_{AB} = -\, q\,(V_B - V_A) = q\,(V_A - V_B)$$

IV Circulation d'un champ de vecteur E

IV-1 Circulation de **E**

De même que l'on parle de l'élément de travail $\delta W = \mathbf{F}\, d\mathbf{l}$ de la force **F** lors du déplacement infinitésimal d**l**, on parle de l'élément de circulation $\delta C = \mathbf{E}\, d\mathbf{l}$ du champ électrique lors du déplacement d**l** d'un "mobile"

Puisque **F** et **E** ne sont séparés que par un coefficient de proportionnalité q, ce qui a été dit sur le travail de **F** reste valable sur la circulation de **E**.

L'élément de circulation d'un champ électrique **E** est une différentielle totale exacte et s'écrit dC=-dV.

La circulation de **E** sur une chemin (Γ) joignant le point A au point B est égale à la différence de potentielle V_A-V_B:

$$\boxed{\oint \mathbf{E}\ d\mathbf{l} = 0}$$

La circulation de **E** sur un contour fermé est nulle.

Cette relation est vraie parce que **E** dérive d'un gradient. Elle est à rapprocher de:

$$\mathbf{rot\ E = 0}$$

qui était vraie pour cette même raison.

Il s'agit en fait de deux relations équivalentes. Mais l'une est vraie en chaque point, c'est une équation locale, alors que l'autre est une forme intégrale qui nécessite un contour fermé.

IV-2 Retour sur le gradient

La relation entre la variation de potentiel et de champ le long d'un chemin (Γ) précisé s'écrivent:

$$dV = - \mathbf{E}\ .\ \mathbf{dl}$$

soit en coordonnées cartésiennes:

$$dV = - E_x\ .\ dx\ - E_y\ .\ dy\ -\ E_y\ .\ dy$$

Choisissons un chemin parallèle à l'axe des x. Lorsque l'on suit ce chemin, y et z sont constants et donc leurs variations dy et dz sont nulles:

$$(dV)_{\text{à y et z constants}} = - E_x\ .\ dx$$

soit:

$$E_x = - \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{y,z}$$

Et en répétant l'opération sur y et z:

$$\mathbf{E} = - \mathbf{grad}\ V$$

V Energie potentielle d'une charge

V-1 Définition

Il existe de nombreuses formes d'énergie. Vous connaissez l'énergie potentielle mgh d'un corps de masse m placé à l'altitude h. Vous connaissez aussi l'énergie cinétique due à la vitesse de déplacement d'un corps $\mathcal{E}_c = 1/2\ m\ v^2$. Il existe d'autres formes d'énergies: l'énergie nucléaire, l'énergie calorifique (profondément liée à l'agitation thermique des atomes dans un corps), etc.

L'energie potentielle est celle qui ne dépend que de la seule position du corps, toutes choses étant égales par ailleurs.

Par définition, l'énergie potentielle d'un corps est égale au travail fourni par l'expérimentateur pour amener le corps à sa position. Cette énergie potentielle est restituée à l'expérimentateur lors du retour de l'objet à sa position première, (les autres énergies n'étant pas modifiées).

Pour effectuer un déplacement de l'objet soumis à une force **F**(**r**) (ici la force électrique), l'expérimentateur doit appliquer à tout moment une force $\mathbf{F}_{\mathbf{exp}}$ telle que la résultante des forces : $\mathbf{F}_{\mathbf{exp}} + \mathbf{F}$ est nulle.

$$\text{Energie potentielle} = \text{Travail de } \mathbf{F}_{\mathbf{exp}} = -\text{Travail de } \mathbf{F}$$

Vous allez peut-être objecter que, si la résultante des forces est nulle, l'objet ne quittera pas sa position d'équilibre. C'est exact. L'expérimentateur doit appliquer au départ une force légèrement plus importante pour accélérer le corps et lui donner de la vitesse. A l'opposé, il doit appliquer une force légèrement réduite à l'arrivée pour ralentir l'objet et l'immobiliser. Plus faibles seront les excédents de force, plus faible sera la vitesse de déplacement de l'objet. Mais nous ne sommes pas pressés; nous avons un temps infini. Les deux éléments perturbateurs peuvent être aussi petits que l'on veut et finalement être négligés (Une analyse rigoureuse montrerait que de toute façon ils se compensent).

V-2 Energie potentielle d'une charge dans un champ électrique

Soit un champ électrique **E** auquel est associé le potentiel V. **E** et V sont créés par les charges q_i placées en 0_i . On définit l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p$ d'une charge q placée en **r** comme le travail que doit fournir l'expérimentateur de l'infini au point **r**.

$$\mathcal{E}_P = \sum_{i=1}^{i=1} \frac{1}{2}\left[(\text{charge } q_i) \ \mathrm{X} \ (\text{potentiel } V_i \ \text{ créé en } r_i \text{ par les autres charges}) \right]$$

(pour faire la distinction entre l'ensemble des charges qui créent le champ et celle qui le subit, on peut appeler les premières (les q_i) charges actives et l'autre (q) charge passive)

Déterminer l'énergie potentielle d'un l'électron situé sur la première orbite de Bohr d'un élément de numéro atomique Z. Quelle est cette énergie pour l'atome d'hydrogène et du cuivre. (Donner l'énergie en électron volt). Quelles sont les longueurs d'onde de photons de mêmes énergies?

VI Energie potentielle d'un ensemble de charges ponctuelles

VI-1 Définition

L'énergie potentielle d'un ensemble de charges q_A, q_B, q_C, ..situées aux points $\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_B$, $\mathbf{r}_C$,... est égale au travail fourni par l'expérimentateur pour déplacer ces charges de l'infini à leurs positions finales.

On fera bien la distinction entre l'énergie potentielle *d'une charge* (passive) dans le champ de charges extérieures (actives) et l'énergie potentiel *d'un système* formé d'un ensemble de charges.

VI-2 Energie potentielle d'un système de deux charges

Au départ, les deux charges q_A et q_B sont placées à l'infini: disons q_A est à l'infini à droite et q_B à l'infini à gauche. Aucune de ces charges n'est soumise à une force (trop éloignées les unes des autres, les charges ne se "voient" pas).

Déplaçons la charge q_A de l'infini à sa position finale, le point $\mathbf{r}_A$. Durant ce déplacement q_A n'est soumis à aucune force (q_B est trop loin). L'expérimentateur ne fournit aucun travail et ce déplacement n'apporte aucune contribution à l'énergie potentielle.

q_A étant en A, déplaçons la charge B de l'infini vers le point $\mathbf{r_B}$. Pour effectuer ce déplacement, l'expérimentateur doit en permanence exercer sur q_B une force égale et opposée à la force électrique. Le travail de la force électrique est celui de déplacement d'une charge q_B dans le champ V_{AB} créé par une charge q_A, la distance entre A et B variant de l'infini à $r_{AB} = |\mathbf{r_B}-\mathbf{r_A}|$,

$$\mathcal{E}_p = W_{exp} = - W = - q_B (V_{AB} (\infty) - V_{AB} (\mathbf{r_B})) = q_B \frac{q_A}{4 \pi \varepsilon_0 r_{AB}}$$

Nous aurions pu tout aussi bien amener d'abord B de l'infini puis déplacer A dans le champ V_{BA} de B. L'expression de l'énergie potentielle est inchangée puisqu'il suffit d'intervertir A et B dans la relation ci-dessus (c'est heureux puisque nous avons défini l'énergie potentielle comme provenant de la seule position des charges).

Nous pouvons symétriser l'expression de l'énergie potentielle totale d'un système composé de deux charges en écrivant:

$$\mathcal{E}_p = = \frac{q_A \ q_B}{4 \pi \varepsilon_0 r_{AB}} = \frac{1}{2} q_A \frac{q_B}{4 \pi \varepsilon_0 r_{AB}} + \frac{1}{2} q_B \frac{q_A}{4 \pi \varepsilon_0 r_{AB}} = \frac{1}{2} (q_A V_{B A} + q_B V_{A B})$$

ou encore en repassant à une notation à un indice où V_A est le potentiel en A (créé par B) et V_B est le potentiel en B (créé par A)

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} (q_A V_A + q_B V_B)$$

VI-3 Energie potentiel d'un système de trois charges

Pour déterminer l'énergie potentielle totale d'un système de trois charges, q_A, q_B, q_C, il faut procéder à trois opération successives:

-Amener q_A de l'infini au point $\mathbf{r_A}$. Comme précédemment, le déplacement de la première charge s'effectue sans travail:

$$W_{exp,1}=0$$

-Amener q_B de l'infini en $\mathbf{r_B}$ dans le champ créé par la charge q_A. Le travail est:

$$W_{Exp,\ 2} = q_B V_{A B}$$

-Amener enfin q_c de l'infini à $\mathbf{r_c}$ dans le champ créé par les charges q_A et q_B. En vertu du principe de superposition, le potentiel créé par A et B est égal à la somme des potentiels créés par chacune de ces charges séparément et donc:

$$W_{Exp,\ 3} = q_C (V_{AC} + V_{BC})$$

L' énergie potentielle totale est donc:

$$\mathcal{E}_p = = \frac{q_A \ q_B}{4 \pi \varepsilon_0 r_{AB}} + \frac{q_C \ q_A}{4 \pi \varepsilon_0 r_{AC}} + \frac{q_C \ q_B}{4 \pi \varepsilon_0 r_{BC}}$$

ou en symétrisant:

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} q_A \left(\frac{q_B}{4\pi\varepsilon_0 r_{AB}} + \frac{q_C}{4\pi\varepsilon_0 r_{AC}} \right) + \frac{1}{2} q_B \left(\frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0 r_{AB}} + \frac{q_C}{4\pi\varepsilon_0 r_{AC}} \right) + \frac{1}{2} q_C \left(\frac{q_B}{4\pi\varepsilon_0 r_{BC}} + \frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0 r_{AC}} \right)$$

Soit encore:

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} q_A \; V_A + \frac{1}{2} q_B \, V_B + \frac{1}{2} q_C \; V_C$$

où V_A est le potentiel créé en A par toutes les charges du système autres que A (ici q_B et q_C).

VI-4 Généralisation

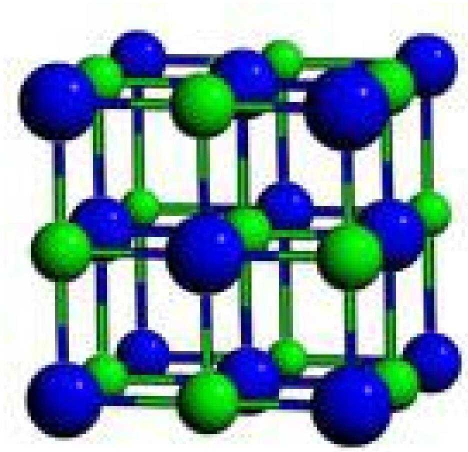
Reproduire le raisonnement avec 4 charges et généraliser.

L'énergie potentielle totale d'un système de n charges q_i situées aux points $\mathbf{r}_i$, s'écrit comme:

$$\mathcal{E}_p = \sum_{i=1}^{i=1} \frac{1}{2} \left[(\text{charge } q_i) \;\; X \left(\text{potentiel } V_i \;\; \text{créé en } r_i \text{ par les autres charges} \right) \right]$$

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=1} q_i \;\; V_i$$

Dans le chlorure de sodium, les atomes de sodium sont sous forme Na^+ et les atomes de chlore Cl^-. La structure est cubique de paramètre 0.564 nm. Les Na^+ sont placés au centre et sur les arètes du cube. Les Cl^- sont situés sur les coins et les centres des faces. Evaluer l'énergie potentielle par atome d'un tel système.

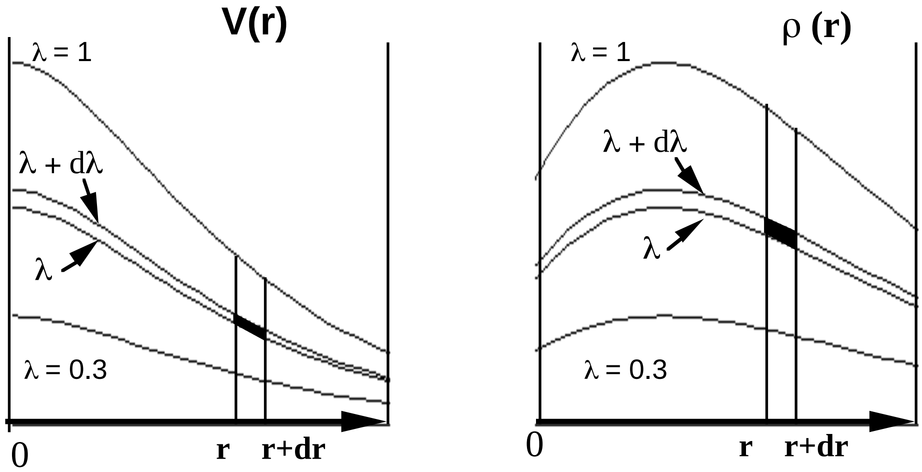


VII Energie électrostatique d'une distribution continue de charges

Imaginons un système dont la densité de charge finale est $\rho(\mathbf{r})$ et dont le potentiel électrique final est donné par $V(\mathbf{r})$.

Si on divise uniformément (en tout point de l'espace) la densité de charge électrique par un facteur 2, en vertu du principe de superposition, le champ électrique et le potentiel seront eux aussi divisés uniformément par 2.

Plus généralement au lieu de diviser charges, champs et potentiels par 2, on peut les multiplier simultanément et en tout point de l'espace par un coefficient λ quelconque, positif ou négatif.



Nous allons utiliser cette propriété pour amener le système d'un état initial sans charge et à potentiel nul en tout point de l'espace à l'état final donné par la distribution de charge finale $\rho(\mathbf{r})$ et par le potentiel final $V(\mathbf{r})$.

Imaginons que l'on est à une étape intermédiaire et que l' on a déjà apporté de l'infini une quantité de charge telle que la densité de charge soit $\lambda\rho\,(\mathbf{r})$ et que donc le potentiel est $\lambda\,V(\mathbf{r})$.

	Densité de charge	Potentiel
Etat initial	0	0
Etat intermédiaire	$\lambda\rho\,(\mathbf{r})$ $(\lambda+d\lambda)\,\rho\,(\mathbf{r})$	$\lambda\,V(\mathbf{r})$ $(\lambda+d\lambda)\,V(\mathbf{r})$
Etat final	$\rho(\mathbf{r})$	$V(\mathbf{r})$

Le potentiel étant $\lambda\,V(\mathbf{r})$, apportons de l'infini une quantité de charge petite, telle que la densité de charge en chaque point $\mathbf{r}$ de l'espace passe de $\lambda\rho(\mathbf{r})$ à $(\lambda+d\lambda)\rho\,(\mathbf{r})$. L'accroissement de densité de charge est évidemment $\rho(\mathbf{r})d\lambda$.

L'élément de charge transféré de l'infini au volume $d\tau$ entourant le point $\mathbf{r}$ est égal à $\rho(\mathbf{r})d\lambda\,d\tau$. De façon similaire à ce que nous avons vu au chapitre III, l'élément de travail fourni par l'expérimentateur pour transférer cet élément de charge dans le volume $d\tau$, depuis le potentiel nul à l'infini au potentiel $\lambda V(\mathbf{r})$ en $\mathbf{r}$, est $\delta W_{exp,d\tau} = \lambda\,V(\mathbf{r})\,\rho(\mathbf{r})\,d\lambda\,d\tau$. Ce n'est autre que V dq.

Puisque l'expérimentateur doit effectuer un transfert de charges élémentaires dans tout l'espace, l'élément de travail qu'il doit fournir est la somme étendue sur tout l'espace des éléments $\delta W_{exp,d\tau}$, soit:

$$\delta W_{exp} = \left[\iiint \rho(\mathbf{r})\;V(\mathbf{r})\;d\tau\right]\;\lambda\,d\lambda$$

Il faut bien voir que le transfert de charge est infiniment petit et qu'il s'effectue à potentiel pratiquement constant, même si après l'opération, le potentiel est passé de $\lambda\,V(\mathbf{r})$ à $(\lambda+\delta\lambda)\,V(\mathbf{r})$.

Le travail total à fournir par l'expérimentateur pour amener le système de l'état où $\lambda = 0$ à celui où $\lambda=1$ est la somme sur λ des travaux élémentaires, soit:

$$W_{exp} = \left[\iiint \rho(\mathbf{r})\;V(\mathbf{r})\,d\tau\right]\int_{\lambda=0}^{\lambda=1}\lambda\,d\lambda$$

Puisque le travail fourni par l'expérimentateur pour transférer les charges n'est autre que l'énergie électrostatique, on obtient après intégration sur λ:

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}\left[\iiint \rho(\mathbf{r})\ V(\mathbf{r})\ d\tau\right]$$

C'est une formule assez proche de celle rencontrée au chapitre III. La somme Σ est simplement remplacée par une intégrale qui s'adapte aux distributions de charge.

Cette relation se généralise à toutes les distributions de charge non ponctuelles et s'écrit:

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}\left[\iiint \rho(\mathbf{r})\ V(\mathbf{r})\ d\tau\right] + \frac{1}{2}\left[\iint \sigma(\mathbf{s})\ V(\mathbf{s})\ dS\right] \frac{1}{2}\left[\int \lambda(\mathbf{l})\ V(\mathbf{l})\ dl\right]$$

C'est la somme sur toutes les charges, du produit de la densité de charge par le potentiel électrique total.

Application au condensateur plan

Le condensateur plan est constitué de deux surfaces chargées maintenues aux potentiels V_A et V_B. La première surface porte la densité $+\sigma$ et la seconde avec $-\sigma$. L'intégration est immédiate:

$$\mathcal{E}_p = 1/2\ [\ \sigma\ S\ V_A - \sigma\ S\ V_B] = 1/2\ Q\ (\ V_A - V_B\ ) = 1/2\ C\ V^2.$$

qui n'est autre que la relation trouvée au chapitre précédent en suivant un autre chemin mais en déplaçant toujours les charges par quantités infiniment petites, sous le potentiel des charges préalablement transférées.

VIII Densité d'énergie électrostatique

VIII-1 Densité d'énergie électrostatique dans le condensateur plan

Rappelons-nous:

- Le champ électrique à l'intérieur du condensateur plan est égal à $E = V/l$ où V est la différence de potentiel entre les armatures et l la distance qui les sépare. Le champ électrique à l'extérieur du condensateur est nul.
- la capacité du condensateur est donnée par $C = \varepsilon_0\ S/l$.

En remplaçant C et V dans l'expression de l'énergie, il vient:

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}\ \varepsilon_0\ E^2 \mathcal{V}$$

où $\mathcal{V} = lS$ est le volume de l'espace dans lequel régne le champ électrique E. L'énergie électrostatique apparait donc comme le produit du volume $\mathcal{V}$ par une grandeur qui a la dimension d'une densité d'énergie par unité de volume.

VIII-1 Densité d'énergie électrostatique

Un calcul plus élaboré montre que, même dans les cas des distributions de charges les plus complexes, on aboutit à la valeur de l' énergie potentielle finale, si on admet qu'il régne en tout point **r** de l'espace une densité d'énergie électrostatique égale à:

$$\frac{d\,\mathcal{E}_p}{d\,\tau} = \frac{1}{2}\ \varepsilon_0\ E^2$$

où E est le champ électrique en ce point.

Soit en intégrant sur tout l'espace:

$$\mathcal{E}_p = \int_{\text{tout l'espace}} \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \, d\tau$$

IX Les deux façons de calculer l'énergie

IX-1 Deux calculs équivalents

Il y a donc deux façons équivalentes de déterminer l'énergie électrostatique d'une distribution de charges.

1re façon : Faire la somme sur toutes les charges de 1/2 ρ V.

2ème façon : Faire la somme sur tout l'espace de la densité d'énergie électrostatique.

Cette deuxième façon de procéder va bien au delà d'une simple équivalence de calcul puisqu'elle semble montrer (et ce sera de plus en plus justifié par la suite) que le champ électrique n'est pas un simple intermédiaire de calcul qui servirait à déterminer la force s'appliquant sur une charge, mais une grandeur physique apportant sa propre énergie.

IX-2 Exemple d'une sphère chargée en surface

Considérons une sphère de rayon R chargée en surface. déterminons l'énergie électrostatique de ce système.

1refaçon de calculer:

Le potentiel auquel est porté la sphère est:

$$V(R) = \frac{Q}{4 \pi \varepsilon_0 R}$$

Toutes les charges Q étant portées au même potentiel V(R). il vient:

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} Q V = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4 \pi \varepsilon_0 R}$$

2èmefaçon de calculer:

Le champ électrique est nul de 0 à R et vaut Q/ 4π ε_0 r^2 de R à l'infini. l' énergie peut donc aussi s'écrire:

$$\mathcal{E}_p = \int_{r=R}^{r=\infty} \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4 \pi \varepsilon_0 r^2} \right)^2 4 \pi r^2 \, dr$$

ce qui conduit aussi à:

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4 \pi \varepsilon_0 R}$$