CHAPITRE VI

Les conducteurs en équilibre statique

I Conducteurs et isolants

I-1 Les charges dans les matériaux

Vous savez que la matière est composée de charges positives: les protons localisés dans les noyaux des atomes et de charges négatives, les électrons, formant le nuage électronique dont l'extension spatiale représente la taille de l'atome.

Vous avez appris aussi que l'on pouvait classer les électrons en deux groupes: les électrons des couches profondes qui sont fortement liés aux atomes et les électrons des couches périphériques qui peuvent passer d'un atome à l'autre, conduisent à la liaison chimique et assurent la stabilité des molécules ou des solides.

Les isolants se distinguent des conducteurs par le type de liaison qui assure la cohésion du solide et par la mobilité des électrons des couches externes.

I-2 Les isolants

Dans les isolants, les électrons des couches externes forment des liaisons covalentes, ioniques ou plus généralement ionocovalentes. Dans ce type de liaison, un électron ne s'éloigne jamais de l'atome dont il est issu, tout au plus s'en écarte-t-il pour atteindre les atomes premiers voisins. Chaque électron reste localisé dans une région très restreinte de l'espace. Il n'est pas mobile.

I-3 Electrons libres dans les conducteurs

Dans les conducteurs, au contraire, les électrons (au moins une partie d'entre eux) qui assurent la cohésion du métal sont libres de se déplacer dans l'ensemble du matériaux. Les électrons libérés par les atomes sont appelés électrons libres.

La valence d'un métal est égale au nombre d'électrons que libère chacun des atomes.

Un métal peut alors être considéré comme un réseau d'ions positifs baignés par une mer d'électrons libres.

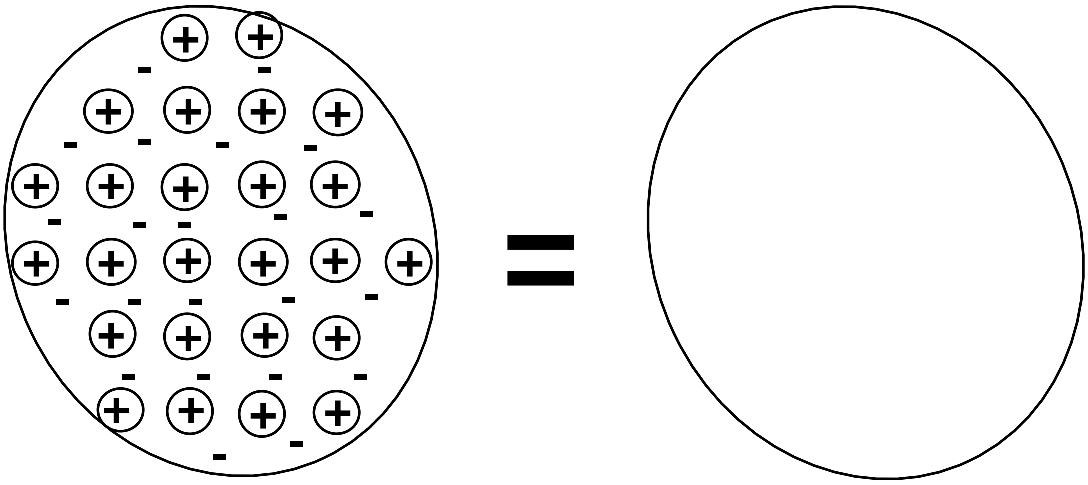
I-4 L'échelle de l'électrostatique

En l'absence de sollicitation électrique extérieure, un métal est électriquement neutre en chacun de ses "points".

Il y a en moyenne (localement) compensation entre les charges + des ions positifs et les charges - des électrons libres.

Cela est vrai à condition de considérer un "point" comme un volume petit mais légèrement supérieur à la taille de l'atome. C'est ce que l'on fait en électrostatique.

Dans le métal représenté ci-dessous, les électrons sont uniformément répartis et viennent compenser en chaque "point" la charge électrique positive des ions. Du point de vue de l'électrostatique, tout se passe comme si ce métal ne portait aucune charge électrique.



<u>II Champ électrique dans un conducteur</u>

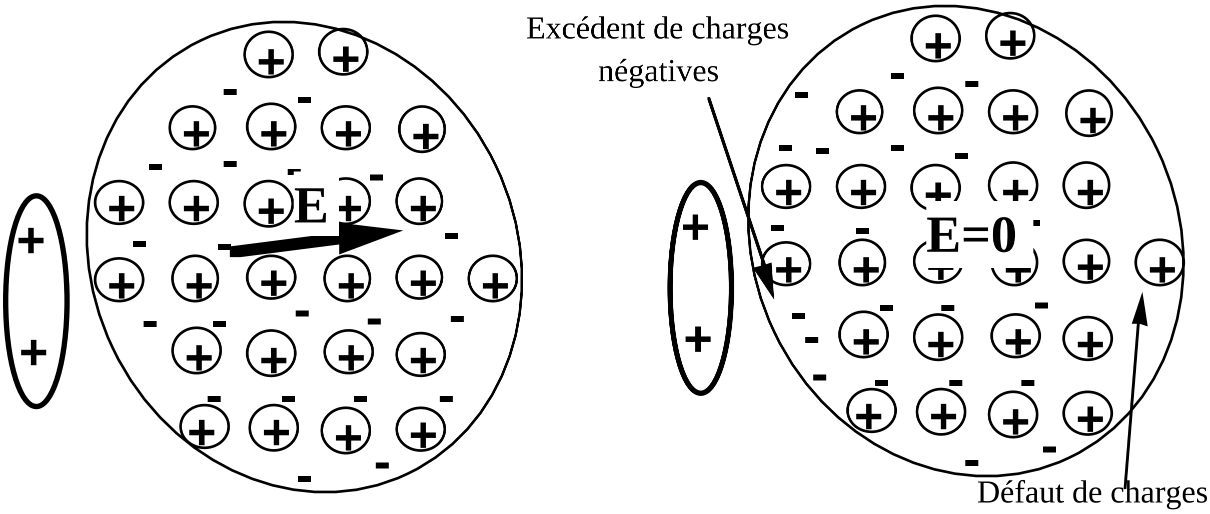
<u>II-1 Réponse d'un conducteur à une sollicitation extérieure</u>

Considérons un métal non chargé dans lequel les charges positives fixes et négatives mobiles (électrons libres) sont distribuées de façon uniforme. Ce métal est électriquement neutre et ne fait apparaître aucune charge électrique résultante.

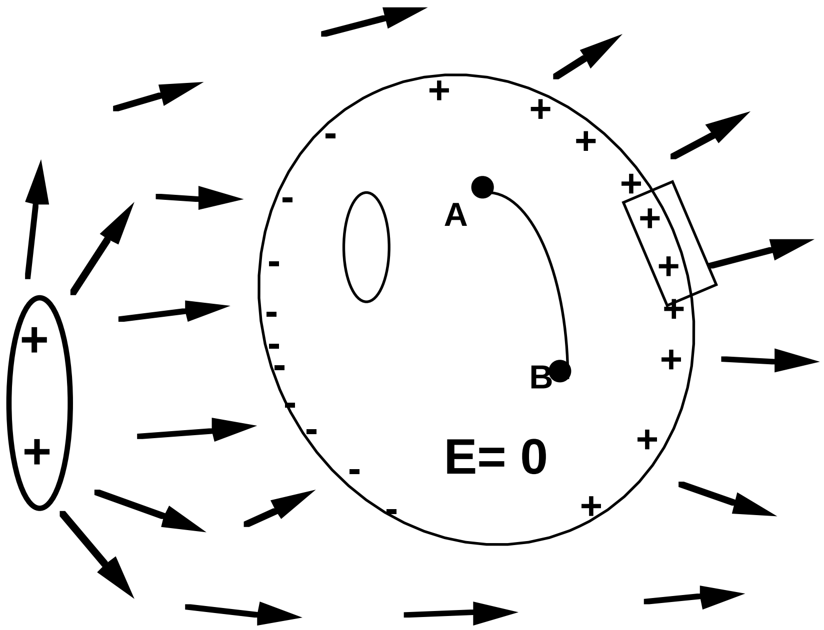
Approchons de ce métal un solide chargé positivement tel que celui représenté sur la figure ci-dessous. Le solide chargé crée dans l'espace et en particulier dans le métal un champ électrique **E(r)**.

En fait, les électrons libres du métal vont réagir très vite à ce champ électrique et, animés par la force de Coulomb, ils vont se déplacer en sens inverse au champ électrique. Les électrons vont donc se diriger vers les charges positives portées par le solide extérieur.

Ne pouvant sortir du solide, des électrons vont progressivement s'accumuler sur la face du métal située au voisinage de la charge extérieure positive et créer en ces points une charge négative résultante. A l'inverse, une charge positive résultante va apparaître au voisinage de la face opposée du solide par défaut d'électrons.



Le déplacement des charges réduit puis rend nul le champ électrique à l'intérieur du métal



Ce faisant, les charges résultantes apportent leur contribution au champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur au solide.

A l'intérieur du métal, ce nouveau champ viendra de toute évidence s'opposer au champ créé par les charges extérieures et réduire le champ électrique total. Les électrons libres ne cesseront leur mouvement de migration que lorsqu'ils ne seront plus soumis à aucune force, c'est-à-dire lorsque le champ électrique total à l'intérieur du métal sera nul.

Ainsi à l'équilibre, à l'intérieur d'un conducteur, le champ électrique total est nul. (situation d'électrostatique)

La situation ci-dessus ne doit pas être confondue avec celle où les extrémités du fil conducteur sont maintenues à des potentiels V_1 et V_2 et reliées à des réservoirs de charges positives et négatives. Cette connexion empêcherait l'accumulation de charges sur les surfaces et ne conduirait à aucune modification du champ électrique à l'intérieur du métal. Les électrons ne feraient que "passer" (situation d'électrocinétique que l'on verra au chapitre suivant.)

II-2 Localisation des charges

Au vu de la description ci-dessus, les charges électriques (résultantes) semblent s'accumuler vers les surfaces.

Montrons en effet que si le champ électrique à l'intérieur d'un corps est nul, alors les charges électriques (s'il en porte) sont nécessairement des charges surfaciques.

Pour cela, considérons une surface fermée à l'intérieur de ce corps. Par hypothèse, le champ électrique est nul en chacun des points de cette surface. Par application du théorème de Gauss, la somme des charges électriques intérieures à cette surface fermée est nulle.

Puisque le même raisonnement peut être reproduit sur toute surface fermée de taille aussi petite que l'on veut, ne traversant pas les frontières du corps, alors on peut conclure qu'il n'y a pas de charge électrique volumique à l'intérieur d'un corps au sein duquel régne un champ électrique nul.

A l'équilibre, les charges électriques portées par un métal sont exclusivement surfaciques.

II-3 Potentiel électrique dans un conducteur

Considérons deux points A et B situés à l'intérieur du métal au sein duquel règne un champ électrique nul.

Déterminons la différence de potentiel entre deux points A et B.

Pour cela, considérons un chemin (Γ) à situé à l'intérieur du métal. La différence de potentiel entre les points A et B ne dépend pas du chemin suivi. Elle peut s'écrire:

$$V_A - V_B = \int_{A\,(\Gamma)}^{B} \mathbf{E}\ \mathbf{dl}$$

Puisque **E** est nul sur tout le chemin suivi, la différence de potentiel entre A et B est nulle.

A l'équilibre, tous les points d'un métal sont au même potentiel. Le métal constitue une équipotentielle.

Là aussi, il faudra bien faire la distinction avec la situation rencontrée en électrocinétique, qui n'est pas une situation d'équilibre statique et où le champ électrique à l'intérieur du métal n'est pas nul.

II-4 Champ électrique à la surface externe d'un conducteur

Le champ électrique externe situé au voisinage immédiat d'un conducteur est perpendiculaire à la surface. Ceci est dû au fait que la surface est une équipotentielle et que les lignes de champ sont perpendiculaires aux équipotentielles.

Ce champ électrique est lié très directement à la densité de charge surfacique locale.

Pour déterminer ce champ, il suffit de considérer une surface fermée, dont deux faces parallèles S sont situées de part et d'autre de la surface du métal et dont les autres éléments sont perpendiculaires à cette surface.

Puisque le champ électrique interne est nul et si nous appelons E_s le champ électrique externe immédiat, nous avons:

$$S\,(0 + E_s) = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \quad \text{soit :} \quad E_s = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

La discontinuité de la composante normale du champ électrique est σ/ε_0.

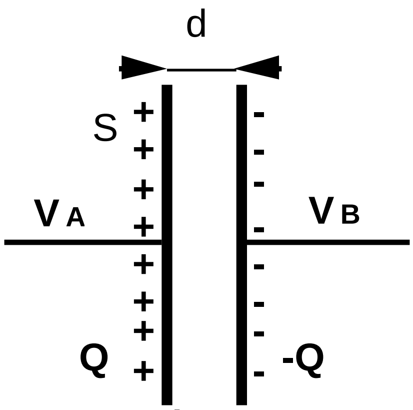
On peut résumer les propriétés d'un conducteur électrique à l'équilibre statique:

-Le champ électrique est nul à l'intérieur du conducteur
-Le potentiel est constant sur l'ensemble du conducteur
-Les charges électriques sont localisées en surface.
-Le champ électrique externe au voisinage immédiat du conducteur est normal à la surface et vaut σ/ε_0.

III Le condensateur sphérique

III-1 rappels sur le condensateur plan

Vous avez rencontré en classe de terminale le condensateur plan. Ce condensateur était constitué de deux plaques métalliques appelées armatures situées en vis à vis et chargées de charges opposées Q et -Q.



Vous avez aussi appris que ce condensateur est caractérisé par sa capacité C. Cette grandeur était définie comme le coefficient de proportionnalité liant la différence de potentiel V_A- V_B entre les armatures à la charge Q citée plus haut.

$$Q= C\ (V_A - V_B)$$

Vous avez peut-être vu aussi que la capacité C est liée à la surface S des armatures et à la distance d qui les sépare par la relation:

$$C = \frac{\varepsilon_0\ S}{d}$$

Nous reviendrons sur ce condensateur en séance de travaux dirigés.

Dans ce chapitre, nous nous penchons sur un condensateur où les armatures métalliques portées à des potentiels VA et V_B ne sont plus planes mais sphériques.

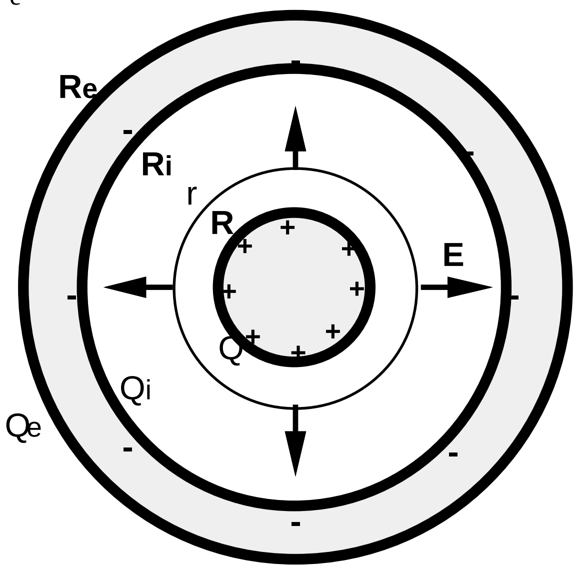
III-2 Description géométrique du condensateur sphérique

Considérons une sphère (intérieure sur la figure ci-dessous) conductrice pleine, de rayon R portant la charge Q.

Au vu des conclusions précédentes et vu la symétrie du problèmes, les charges Q vont se répartir sur la surface avec la densité de charge

$$\sigma = \frac{Q}{4\ \pi\ R^2}$$

Entourons cette sphère d'une couronne sphérique conductrice de rayon intérieur R_i et de rayon extérieur R_e.



L'ensemble constitué de la sphère interne (armature intérieure, qui pourrait être creuse) et de la couronne sphérique (armature extérieure) est appelé un condensateur.

III-3 Charge portée par la surface intérieure de la couronne sphérique

Considérons une sphère de rayon r compris entre R_i et R_e. Vu les propriétés des conducteurs en équilibre, en tout point de cette sphère, le champ électrique est nul. Cela signifie, par application du théorème de Gauss, que la somme des charges intérieures à cette sphère est nulle.

Puisque les charges intérieures comprennent la charge +Q localisée sur la surface de la petite sphère, il faut ajouter Q_i= - Q sur la surface intérieure de la couronne sphérique. Vu la symétrie du problème, la charge Q_i se répartira uniformément en surface.

III-4 Champ électrique entre les deux armatures

Considérons maintenant une sphère de rayon r compris entre les armatures du condensateur, c'est-à-dire entre R et R_i. Vu la symétrie du problème, le champ électrique **E**(r) en chaque point de cette sphère est radial et constant. En appliquant le théorème de Gauss sur la surface fermée que constitue cette sphère de rayon r, il vient:

$$4 \pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Soit:

$$E(r) = \frac{Q}{4 \pi \varepsilon_0 r^2} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}$$

III-4 Différence de potentiel entre les deux armatures

La différence de potentiel entre les armatures s'obtient en intégrant dV = **-E. dl** le long d'un rayon. Sur un tel rayon, **E** et **dl** sont colinéaires et il s'ensuit:

$$V_A - V_B = \frac{Q}{4 \pi \varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R}\right)$$

III-5 Capacité du condensateur

Comme dans le condensateur plan, il y a proportionnalité entre la charge Q portée par l'armature centrale (et - Q porté par la surface interne de l'armature externe) et la différence de potentiel entre les armatures. Le coefficient de proportionnalité C, qui relie Q à la différence de potentiel V_A-V_B selon:

$$Q = C\,(V_A - V_B)$$

est appelé la capacité du condensateur.
La capacité du condensateur sphérique est:

$$C = \frac{4 \pi \varepsilon_0 R R_i}{R - R_i}$$

L'unité de capacité est le farad

III-6 Condensateur plan, limite du condensateur sphérique

Si la distance entre les armatures devient beaucoup plus petite que les rayons R et R_i, le condensateur sphérique s'approche du condensateur plan.

Vérifier en remplaçant R_i par R+d et en se plaçant dans le cas où d<<R que l'on retrouve l'ensemble des expressions du condensateur plan.

III-7 Charge portée par la surface externe de la couronne sphérique

La charge Q_e portée par la surface externe de la couronne sphérique va dépendre du potentiel V_B de cette couronne par rapport à l'infini.

Deux cas extrêmes apparaissent:

- La couronne sphérique est isolée

- L'armature externe est reliée à un réservoir de charge et est maintenue à un potentiel V=0

Si l'armature externe est isolée, la somme des charges qu'elle contient doit être nulle. Puisque la charge -Q se place sur la surface intérieure de cette armature, la charge $Q_e = +Q$ doit se placer sur la surface extérieure.

Par application du théorème de Gauss sur une sphère de rayon $r>R_e$, le champ électrique en un point M(**r**) extérieur aux armatures est simplement $Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$. De R_e à l'infini, le potentiel vaut $Q/4\pi\varepsilon_0 r$. Il est constant dans l'armature extérieure où il vaut $Q/4\pi\varepsilon_0 R_e$.

Si l'armature est maintenue à un potentiel nul, il n'y a pas de différence de potentiel entre l'infini et les points situés à R_e. Cela impose un champ électrique extérieur nul. Par application du théorème de gauss $Q_e=0$.

Le cas le plus fréquent reste celui où l'on impose un potentiel V_B différent de 0 à l'armature externe. On peut facilement montrer que la charge Q_e est alors égale à $4\pi\varepsilon_0 RV_A$.

Dans la pratique, cette charge Q_e est en général beaucoup plus faible que Q et sera négligée.

IV énergie stockée dans un condensateur

IV-1 Charge directe d'un condensateur

Considérons deux armatures de condensateur non chargé. Au départ, la différence de potentiel entre les armatures $\Delta V = V_A - V_B$ est égale à 0.

Nous allons charger le condensateur en extrayant la charge Q de l'armature A et en la déposant sur l'armature B.

En fait, ce transfert doit être réalisé par étapes en prélevant sur l'armature A et en déposant sur l'armature B des éléments de charge δq successifs.

Prélevons une charge δq à l'armature A et amenons la sur l'armature B. Ce premier transfert ne requiert aucun travail puisque la différence de potentiel entre les armatures était nul.

Après ce premier transfert de charge, l'armature A porte la charge δq et l'armature B la charge $-\delta q$. la différence de potentiel $u_A - u_B$ est $\delta q/C$. (la lettre u est utilisée pour noter les potentiels au cours de la charge du condensateur. u va varier de 0 à V).

Effectuons un deuxième transfert d' élément de charge δq. Le travail de la force électrique est $\delta q\,(u_B-u_A)$ et donc celui fourni par l'expérimentateur est $\delta q\,(u_A-u_B)= \delta q\, q/C = \delta q\, \delta q/C$.

Après ce second transfert, la charge du condensateur est $q= 2\delta q$ et la différence de potentiel entre les armatures est $u_A-u_B = q/C = 2\delta q/C$.

Le travail fourni par l'expérimentateur pour un troisième transfert est $\delta q\,(u_A - u_B) = \delta q\, q/C = \delta q\,(2\delta q/C)$, etc.

Ainsi l'élément de travail fourni par l'expérimentateur pour transférer la charge δq est $\delta W = (u_A - u_B)\,\delta q = \delta q\, q/C$ où q est la charge qui a été transférée préalablement et $u_A - u_B$ la différence de potentielle acquise par les transferts de charge précédents.

Le travail total fourni par expérimentateur pour transférer la charge Q est la somme des travaux élémentaires soit:

$$W = \int_{q=0}^{q=Q} \frac{q}{C}\,dq = \frac{Q^2}{2\,C} = \frac{1}{2}\,C\,(V_A - V_B)^2$$

IV-2 Energie potentielle d'un condensateur

Puisque l'énergie potentielle électrostatique est égale au travail fourni par l'expérimentateur pour modifier la position des charges, et compte tenu des relations entre $V=(V_A-V_B)$, Q et C, on obtient les relations suivantes:

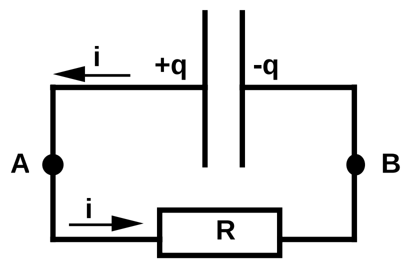
$$E_p = \frac{1}{2}\,\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\,C\,V^2 = \frac{Q\,V}{2}$$

VI Charge et décharge d'un condensateur à travers une résistance

V-1 Décharge d'un condensateur

Considérons un condensateur C portant à l'instant initial la charge Q. Relions à l'instant t=0 ses armatures à une résistance R. Sa charge à l'instant t est notée q(t).

En choisissant le signe de charge et le sens positif du courant comme indiqués ci-dessous, $i(t) = -dq/dt$ (si le courant s'écoule dans le sens indiqué par la flèche(i>0), q décroît)



La différence de potentiel $V(t) = V_A - V_B$ s'écrit:

-En considérant la branche contenant la résistance:

$$V_A - V_B = Ri = -R\,dq/dt$$

-En considérant la branche contenant le condensateur:

$$V_A - V_B = q/C$$

ce qui conduit à :

$$R\,\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

C'est une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants et sans second membre.

La solution générale s'écrit:

$$q(t) = \lambda \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

La constante λ se détermine en tenant compte du fait que q=Q à l'instant t=0. soit λ=Q.

l'intensité instantannée di ciurant i = dq/dt =

$$i = -\frac{dq}{dt} = q(t) = \frac{Q}{RC} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

La puissance dissipée à l'instant t dans la résistance est:

$$P(t) = \frac{d\,W(t)}{dt} = R\,(i(t))^2$$

Cela signifie que l'élément d'énergie dW(t) dissipé dans la résistance entre les temps t et t+dt s'écrit:

$$d\,W(t) = R\,(i(t))^2\,dt$$

L'énergie totale dissipée dans la résistance lors de la décharge, est:

$$W = \int_{t=0}^{t=\infty} R\,(i(t))^2\,dt = R\left(\frac{Q}{R\,C}\right)^2 \int_{t=0}^{t=\infty} \exp\left(-\frac{2\,t}{RC}\right)$$

que l'on trouve facilement par intégration:

$$W = \frac{Q^2}{2\,C}$$

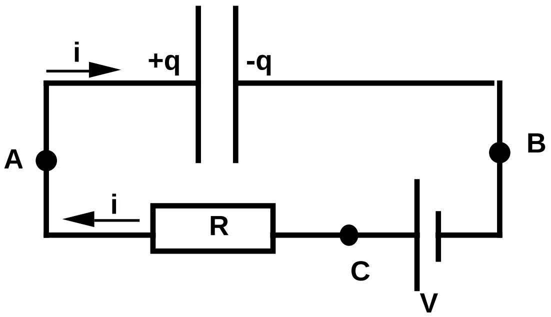
L'énergie qui était contenue dans le condensateur est dissipée par effet joule.

V-2 Charge d'un condensateur

Considérons un circuit contenant une pile fournissant une tension E (à ne pas confondre avec le champ électrique), une résistance R et un condensateur de capacité C.

A l'instant t=0, le condensateur n'est pas chargé et on ferme le circuit.

Avec les signes des charges et le sens du courant indiqués sur la figure ci dessous: i= dq/dt . En effet si le courant s'écoule dans le sens de la flèche (i >0) q croît.



nous avons:

$$V_A - V_B = \frac{q}{C} \qquad V_C - V_A = R\,i \qquad V_C - V_B = V$$

ce qui conduit à l'équation différentielle:

$$V = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$$

qui est une équation différentielle à coefficients constants avec second membre.

La solution est la somme d'une solution de l'équation sans second membre et d'une solution particulière.

Comme vu plus haut, la solution de l'équation sans second membre est:

$$q(t) = \lambda \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

alors que q= CV est une solution particulière.

Il vient:

$$q(t) = C V + \lambda \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

dont la solution, compte tenu de la condition initiale q(0)= 0 s'écrit:

$$q(t) = C V \left(1- \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right)$$

l'intensité dans le circuit s'écrit:

$$i(t) = \frac{V}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

La puissance débitée par le générateur est: $P(t) = V\, i(t)$

La puissance dissipée dans la résistance est $R\, i^2(t)$

La puissance fournie au condensateur est : $q(t)\, i(t) / C$

Montrer que l'énergie totale fournie par le générateur est QV où Q est la charge finale du condensateur.

Montrer ensuite que l'énergie QV/2 est stockée dans le condensateur et que QV/2 est dissipée par effet joule.

Tracer dans chacun des cas q(t) et i(t).