CHAPITRE VII

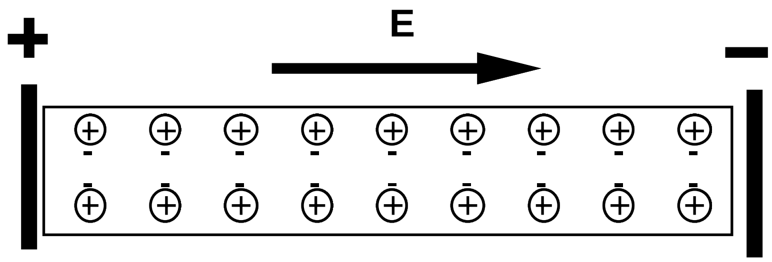
Les courants électriques

I Le courant continu

I-1 Maintien d'un courant continu

Considérons un cylindre métallique conducteur, constitué d'ions positifs fixes et d'électrons libres mobiles. Comme nous l'avons vu précédemment, en l'absence d'influence électrique extérieure, il y a localement et en moyenne compensation entre les ions positifs fixes et les électrons libres mobiles, ce qui assure la neutralité électrique locale du métal.

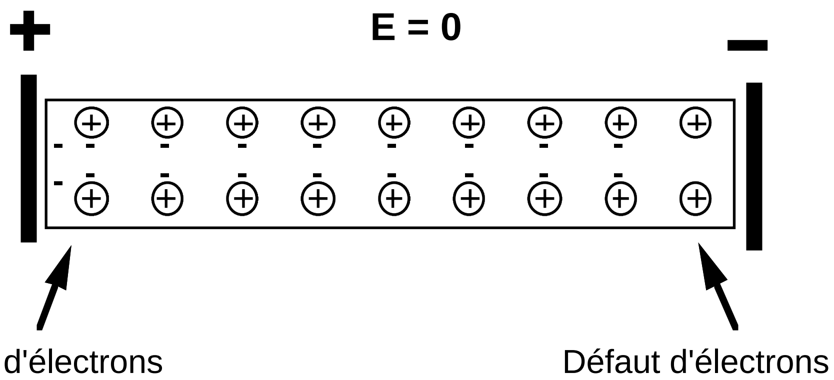
Plaçons sans contact, au voisinage de ses extrémités, deux plaques chargées positivement et négativement.



Instant t=0. les électrodes créent un champ électrique qui va disparaître quasiment instantanément.

A l'instant t=0 un champ électrique créé par les électrodes apparaît dans le cylindre.

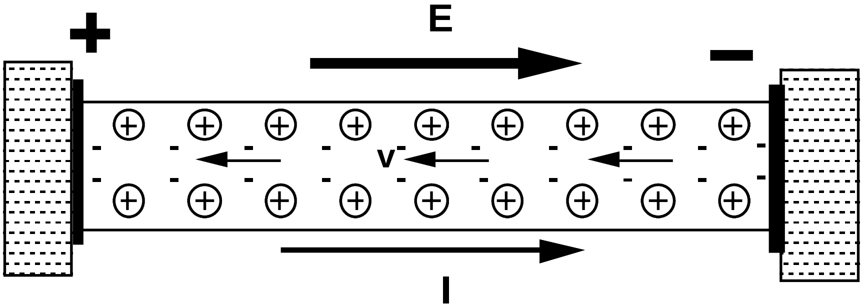
Mais quasi instantanément les électrons libres du métal se déplacent sous l'influence du champ en induisant un excédent de charges négatives au voisinage de la plaque positive et un défaut d'électrons au voisinage de la plaque négative, ce qui a pour effet d' annihiler le champ électrique à l'intérieur du cylindre qui, comme dans le chapitre précédent, devient une équipotentielle.



Cette situation n'assure pas de transfert de charge d'une électrode à l'autre et donc pas de passage continu de courant.

Pour ce faire, mettons les électrodes et les extrémités du métal en contact et faisons en sorte que des électrons puissent être librement fournis ou reçus par les électrodes maintenues à leurs potentiels. Celles-ci se comportent comme des réservoirs de charges. Il est clair que des électrons, attirés par l'excédent de charges positives localisées à l'extrémité droite du barreau, passent de l'électrode négative au barreau pour de nouveau assurer la neutralité électrique en cette extrémité. De le même façon, à extrémité gauche, les électrons excédentaires quittent le barreau pour rejoindre l'électrode positive et assurer là aussi la neutralité électrique.

Cela a pour effet de rétablir le champ électrique initial et d'entretenir le déplacement des électrons à l'intérieur du barreau et un transfert de charge avec les électrodes.



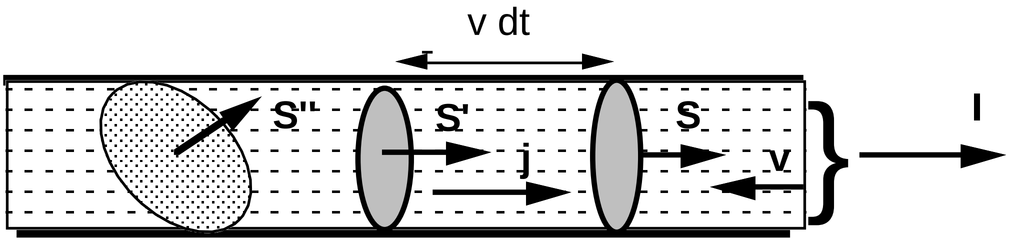
Le gradient de potentiel à l'intérieur du cylindre est rétabli.

Ce champ **E** qui assure le déplacement des électrons et la circulation du courant est appelé champ électromoteur.

<u>I-2 Intensité de courant électrique</u>

Considérons une section droite du cylindre sur lequel nous avons fait figurer les électrons libres. Les ions positifs qui assurent la neutralité électrique n'ont pas été représentés.

On appelle intensité de courant électrique la quantité de charge Q qui traverse la section droite S en une seconde.



Soit **v** la vitesse de déplacement des électrons, $q = -|e|$ leur charge élémentaire, n la densité d'électrons libres par unité de volume (pour le cuivre n est de 8.45 $10^{28}/m^3$), et $\rho = nq$ la densité de charge par unité de volume.

Les dN électrons qui traversent la section S pendant l'intervalle de temps dt compris entre t et t+dt sont ceux qui se trouvaient à l'instant t dans le cylindre délimité par la section S et la section S' distante de la précédente de dl = v dt. Ce nombre d'électrons est:

$$dN = n\ S\ dl$$

L'élément de charge dQ qui traverse S pendant le temps dt est:

$$dQ = n\ S\ l\ q = n\ q\ v\ S\ dt$$

Ainsi, l'intensité du courant électrique au temps t, égale à la charge qui traverse S pendant l'unité de temps, est simplement:

$$I = dQ/dt = n\ q\ v\ S = \rho\ v\ S$$

Par malchance historique, le sens positif du courant électrique a été choisi opposé au sens de déplacement des électrons.

<u>I-3 Densité de courant</u>

Par définition, on appelle densité de courant électrique la grandeur vectorielle **j**:

$$\boxed{\mathbf{j} = n\ q\mathbf{v} = \rho\mathbf{v}}$$

La densité de courant est un vecteur parallèle à la vitesse de déplacement des charges, d'intensité d'autant plus importante que la charge des porteurs élémentaires est élevée et que leur densité volumique est grande.

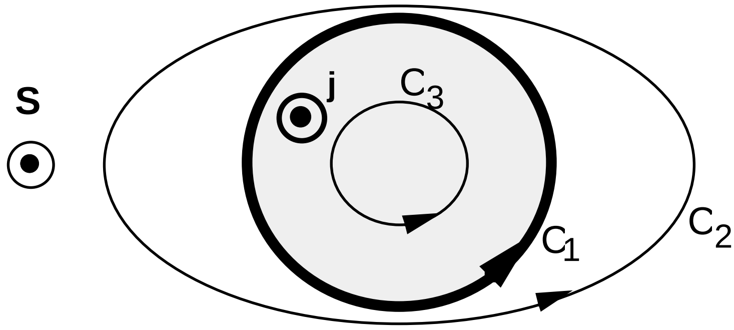
L'intensité du courant électrique apparaît comme le produit scalaire de la surface **S** et de la densité de courant **j**. L'intensité est le flux de **j** à travers **S**.

On peut tout aussi bien choisir une surface $\mathbf{S_1}$ qui ne soit pas une section droite du barreau mais soit une section oblique orienté de telle sorte que le vecteur $\mathbf{S_1}$ fasse un angle θ avec l'axe du barreau. Il s'en suit que l'aire $S_1 = S/\cos\theta$ est supérieure à l'aire S. Mais le flux de **j** à travers cette surface reste identique. Le produit scalaire $\mathbf{j.S_1}$ reste égal à I = **j.S.**

Ainsi l'intensité du courant électrique est une grandeur scalaire. Pour la définir, il faut se donner un circuit orienté fermé supportant une surface orientée. L'intensité de courant est la quantité de charge qui franchit la surface par unité de temps.

I-4 Exemple d'intensité à travers un circuit

Reprenons l'exemple d'un cylindre au sein duquel règne une densité de courant **j** uniforme. Représentons une coupe perpendiculaire vue de dessus.



Le cercle en trait gras délimite le pourtour extérieur du cylindre.

j représente le vecteur densité de courant. Il est supposé uniforme dans tout le conducteur.

Sur le pourtour extérieur du cylindre, nous avons figuré un circuit orienté (C_1) auquel correspond un vecteur surface $\mathbf{S_1}$ perpendiculaire au plan de la figure et dirigé vers l'avant.

Déterminons l'intensité du courant qui traverse (C_1). I_1 est simplement le produit de la surface S_1 et de j $I_1 = j\ S_1$.

Nous avons aussi représenté deux circuits (C_2) et (C_3).

Puisque la densité de courant sur la surface externe au conducteur est nulle, l'intensité de courant qui traverse (C_2) est identique à celle qui traverse (C_1).

$I = I_1 = I_2$ est ce que l'on appelle communément l'intensité qui parcourt le conducteur.

L'intensité de courant qui traverse (C_3) est de toute évidence égale à $I_3 = j\ S_3$. Cette intensité est le flux de **j** à travers $\mathbf{S_3}$**.** I_3 est inférieure à I.

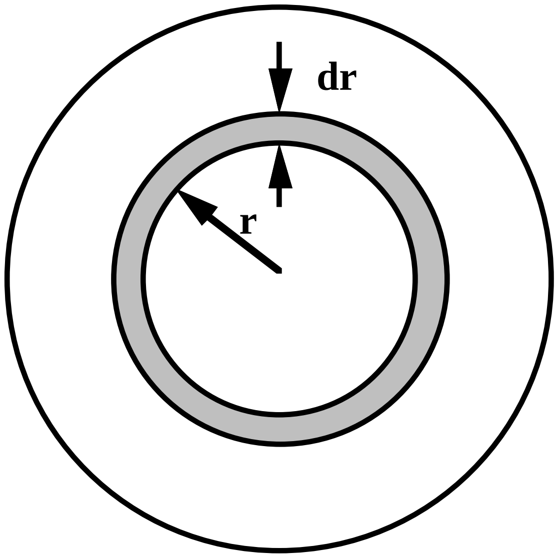
I-5 Densité de courant non uniforme et intensité de courant

Dans l'exemple vu ci-dessus, la densité de courant a été supposée uniforme. En fait dans un métal, la densité de courant **j** peut ne pas être constante, si par exemple la résistivité du métal n'est pas uniforme.

Supposons simplement que la densité de courant varie avec la distance à l'axe du cylindre selon une loi j(r).

Puisque tous les point situés à la distance r de l'axe central sont parcourus par la même densité de courant j(r), la contribution de la partie hachurée à l'intensité I du fil est:

$$dI = j(r) 2\pi\ r\ dr$$



et l'intensité totale qui parcourt le fil de rayon R est :

$$I = \int_0^R j(r)\, 2\pi\, r\, dr$$

II Lois d'écoulement des charges électriques

II-1 Etablissement d'un courant continu dans un supraconducteur

Plongé dans un champ électrique constant,

$$E = \frac{V_A - V_B}{L}$$

où L est la longueur du fil aux extrémités duquel les potentiels V_A et V_B sont maintenus, chaque électron de charge $q = -|e|$ est soumis à une force **F**= q**E** et obéit à la loi fondamentale de la dynamique:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = m\,\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Puisque la dérivée de la vitesse est constant (mouvement uniformément accéléré), la vitesse obéit à l'équation:

$$\mathbf{v} = \frac{q}{m}\,\mathbf{E}\,t + \mathbf{v}_0$$

où $\mathbf{v_0}$ est la vitesse initiale des électrons qui ici se trouve être nulle.

la densité de courant s'écrit alors:

$$\mathbf{j} = n\,q\mathbf{v} = \frac{n\ q^2}{m}\,\mathbf{E}\ t$$

ce qui signifie que la densité de courant et donc l'intensité du courant croissent linéairement avec le temps.

Vous savez que ce n'est pas vrai. En effet, si à l'aide d'un générateur vous établissez une différence de potentiel entre les extrémité d'un fil, l'intensité du courant est constante et suit la loi U=RI. Vous avez par exemple mesuré qu'un fil de cuivre de 10m de longueur, de 0.1mm2 de section soumis à une différence de potentiel de 1V était parcouru par un courant constant de 0.17A.

En fait, si la croissance linéaire de l'intensité du courant électrique n'est pas observée sur le cuivre, elle est vérifiée sur le niobium en dessous de 10K ou sur un alliage d'yttrium, de baryum, de cuivre et d'oxygène (YBaCuO) en dessous de 90K. Ces matériaux sont à ces température des supraconducteurs. Pour stopper l'accroissement du courant, il est nécessaire de supprimer la différence de potentiel. Les électrons ne sont plus soumis à aucune force et poursuivent leur déplacement à vitesse constante sans le moindre freinage. On peut ainsi faire circuler indéfiniment un courant dans un anneau supraconducteur fermé dans lequel on a lancé le courant.

II-2 Etablissement d'un courant dans un conducteur résistif

Dans les cas qui restent malheureusement usuels, la suppression de la différence de potentiel et donc du champ électrique interne conduit à la disparition instantanée du courant.

Cela signifie donc que les électrons sont soumis à des forces de frottement. Les frottements proviennent des interactions avec les ions positifs ou avec les impuretés contenues dans le métal.

La forme la plus simple de force de frottement est **f**=-k**v**. C'est une force opposée au sens de déplacement et proportionnelle à la vitesse.

Sous l'effet de la force électrique et de la force de frottement, la relation fondamentale de la dynamique devient:

$$\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E} - k\,\mathbf{v}$$

et la vitesse obéit à l'équation différentielle suivante:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} + k\,\mathbf{v} = q\mathbf{E}$$

qui est une équation différentielle à coefficients constants avec second membre.

La solution est la somme:

- de la solution de l'équation sans second membre:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} + k\,\mathbf{v} = 0$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\, e^{-\left(\frac{a}{m}\right) t}$$

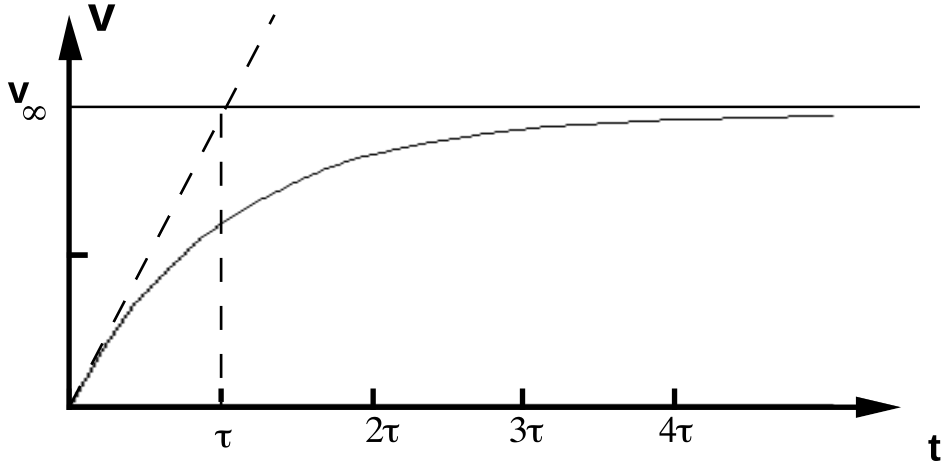
- et d'une solution particulière:

$$\mathbf{v}_\infty = \frac{q}{k}\mathbf{E}$$

La constante étant déterminée par la condition initiale: à t=0, v=0, il vient:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\infty\left(1 - \mathbf{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

où τ = - (m/k) est une constante de temps caractéristique.



lorsque t << τ ll'argument de l'exponentielle est très petit devant 1 et par développement limité (pour e petit $e^{\varepsilon} \approx 1+\varepsilon$)

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\infty\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

Lorsque t >> τ l'exponentielle tend vers 0 et v tend vers sa vitesse limite v_∞

v est en fait très proche de v_∞ lorsque t est supérieur à 3 ou 4τ.

La densité de courant est est alors:

$$\boxed{\mathbf{j} = \frac{n\,q^2}{k}\mathbf{E} = \frac{n\,q^2\tau}{m}\mathbf{E} = \sigma\,\mathbf{E} = \frac{1}{\rho_e}\mathbf{E}}$$

où σ est une grandeur caractéristique du matériau appelée conductivité électrique. Son inverse ρ_e est la résistivité électrique.

L'intensité du courant électrique s'écrit:

$$I = j\,S = \frac{S}{\rho_e}E = \frac{S}{\rho_e}\frac{V_A - V_B}{L}$$

note:

La résistivité électrique se note généralement ρ. Nous l'avons notée ρ_e afin d'éviter toute confusion avec la densité de charge volumique notée elle aussi ρ.

III La résistance électrique

III-1 Définition

La formule donnant l'intensité du courant se réécrit:

$$V_A - V_B = \frac{\rho_e\,L}{S}\,I = R\,I$$

R est déduit de la connaissance du courant et de la différence de potentiel. Ainsi de la connaissance de la résistance R et des dimensions géométriques du fil on peut déduire la résistivité ρ_e du matériau. Connaissant ρ_e, la charge de l'électron et sa masse on en déduit k et τ .

A l'aide des valeurs numériques données ci-dessus, déterminer la résistivité du cuivre et montrez que pour ce métal τ est de l'ordre de 10^{-14}s. Déterminer la vitesse v de déplacement des électrons.

Cette très faible valeur de τ dans les métaux montre pourquoi l'évolution du courant lors de l'établissement de la différence de potentiel n'est pas observable. L'intensité du courant atteint quasi instantanément sa valeur limite .

III-2 La force électromotrice

Considérons un circuit contenant un générateur maintenant entre les extrémités d'un fil métallique une différence de potentiel V= V_A-V_B. Les électrons circulent dans le métal sous l'effet du champ électrique **E** et de la force **F** avec:

$$V_A - V_B = \int_A^B \mathbf{E}\,.\,\mathbf{dl} = \int_A^B \frac{\mathbf{E}}{q}\,.\,\mathbf{dl}$$

Dans la dernière expression, nous avons remplacé **E** par **F**/q où F est la force qui s'applique sur les charges q.

Sans doute parce que la force intervient à ce niveau et par abus de langage, on note V la force électromotrice entre A et B. Dans les circuits électriques, elle est souvent notée E et ne doit pas être confondue avec un champ électrique.

Ainsi la force électromotrice entre A et B apparaît comme la circulation, entre ces points, de la force rapportée à la charge, qui s'applique sur les charges mobiles et assure leur mouvement.

Il faudra bien se souvenir de cette définition lors de l'étude de l'induction et de la force électromotrice induite.

III-3 Résistance électrique et loi de Joule

Comme nous l'avons vu plus haut, les forces de frottement conduisent à une vitesse limite de déplacement des électrons et les freinent en un temps de 10^{-14} s lors de la suppression du champ électrique. En régime continu, elles provoquent un dégagement de chaleur.

La puissance dissipée par chaque électron est:

$$p = -\mathbf{f}.\mathbf{v} = k\,v^2 = \frac{k}{n^2\,q^2}\,j^2$$

soit par unité de volume (on multiplie par la densité électronique):

$$P = n\,\frac{k}{n^2\,q^2}\,j^2 = \rho_e\,j^2$$

et pour l'ensemble du fil: (on multiplie par L S le volume total du fil):

$$W = R\,I^2$$

C'est la loi de Joule.

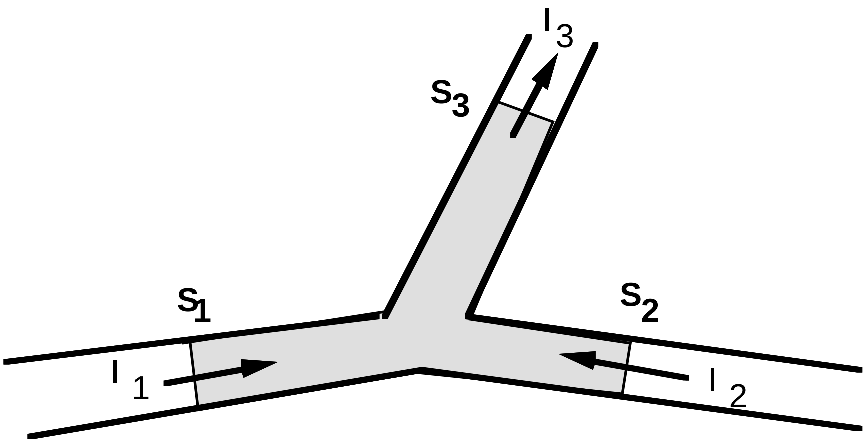
La chaleur dissipée dans un conducteur électriques est due aux forces de frottement des électrons lors de leur déplacement.

IV Calculs de circuits électrique

Ce paragraphe ne constitue qu'un rappel de ce que vous avez déjà vu sur les circuits électriques simples. Nous proposons en IV-4, et sans la justifier, une méthode de résolution systématique des circuits complexes. Vous pouvez trouver de longs développements dans des livres d'électricité plus spécialisés.

IV-1 Loi des noeuds

Un circuit électrique simple est composé de générateurs et de résistances. Ces éléments forment un réseau où apparaissent des branches et des noeuds. Une succession de branches formant un circuit fermé est appelée une maille.



Les force électromotrices des générateurs et les résistances de chaque branche étant données, les intensités peuvent être calculées à l'aide de deux lois simples appelées 1re et 2ème lois de Kirchhoff ou loi des noeuds et loi des mailles.

La première des lois est une loi de conservation. Un volume entourant un noeud et tel que celui limité ci-dessous par les surfaces S_1, S_2 et S_3 n'est le siège d'aucune accumulation de charges. Cela signifie que, pendant l'unité de temps, il y a autant de charges pour entrer dans ce volume que pour en sortir.

Puisque la quantité de charge traversant les surfaces limitant le volume est égale au produit du temps et de l'intensité du courant, il s'en suit pour l'exemple ci dessus:

$$I_1 + I_2 = I_3$$

La somme des intensités des courants entrants est égale à la somme des intensités des courants sortants.

Si par convention, on choisit comme positif de courant le courant se déplaçant vers un noeud, la loi des noeuds s'écrit:

$$\boxed{\sum_k I_k = 0}$$

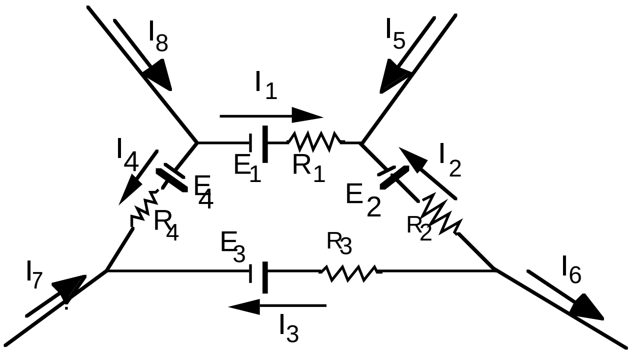
IV-2 Loi des mailles

La loi des mailles constitue la synthèse de trois propriétés:

-Un générateur maintient entre ses bornes une différence de potentiel E_i (ne pas confondre E_i avec un champ électrique E_i qui est ici une force électromotrice)

-La différence de potentiel entre les bornes d'une résistance est égale à RI.

-La somme des différences de potentiel d'un circuit fermé est nulle.



En choisissant un sens de parcours positif de la maille, selon lequel les courants sont orientés et en plaçant les générateurs de telle sorte que le sens choisi comme positif l'atteint par la borne - (la plus petite sur le schéma), on a pour chaque maille:

$$\boxed{\sum_k (R\, I_k - E_k) = 0}$$

Si dans une branche le courant se trouve être orienté en sens contraire du sens de parcours, on fait précéder RI_k du signe - et si le sens positif du parcours atteint le générateur par la borne positive, on fait précéder E_k du signe +.

V-3 Principe de résolution d'un circuit.

On dispose d'un circuit complexe dont on a représenté une maille ci-dessous. La détermination des courants passe par 4 étapes:

-Définition d' un sens de courant arbitraire sur chaque branche. (Si le résultat final de courant est positif, c'est qu'effectivement il circule dans ce sens, si le courant est trouvé négatif, c'est qu'il circule en sens opposé.

-Ecriture de la loi de conservation du courant à chaque nœud (loi des nœuds), soit au vu du schéma ci dessous:

$$I_8 - I_1 - I_4 = 0 \qquad I_3 + I_4 + I_7 = 0 \qquad -I_6 - I_3 - I_2 = 0 \qquad \text{etc.}$$

-Définition d'un sens de parcours positif sur chaque maille. (cercle fléché de la figure).

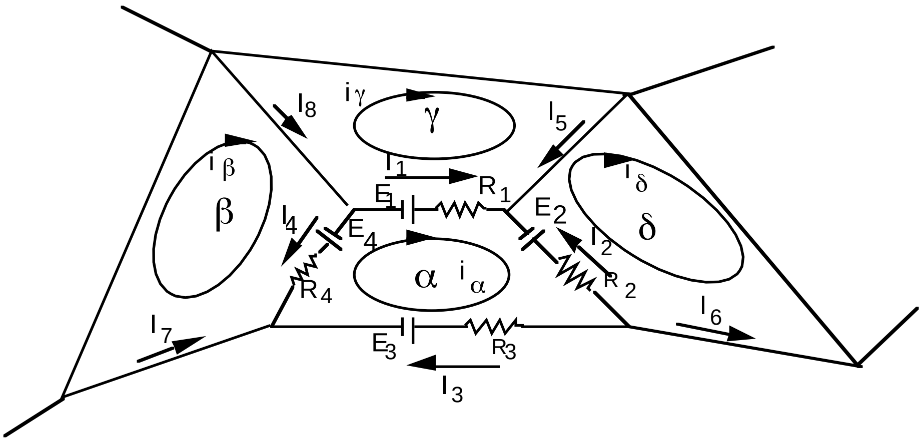
-Ecriture la loi des mailles de pour chacun d'eux, soit ici:

$$-E_1 + R_1 I_1 - E_2 - R_2 I_2 + R_3 I_3 + E_3 - R_4 I_4 + E_4 = 0$$

-Résolution du système d'équation

V-4 Méthode des courants de maille

La résolution des circuits électriquestelle qu' énoncée ci dessus est simple dans son principe. Elle peut néanmoins conduire à des calculs longs et pénibles, souvent à la suite d'un choix peu heureux d'élimination de variables.



Vous pourrez trouver dans les livres spécialisés plusieurs méthodes de résolution systématiques. Nous vous en proposons une, celle des courants de maille. Elle comporte 6 étapes:

i) Attribution à chaque branche d' un courant orienté I_1,I_2, I_3 , etc.

ii) Définition et orientation des mailles indépendantes (α), (β), (γ), etc.

iii) Affectation à chacune des mailles, d' un courant de maille fictif i_α, i_β, i_χ , etc.

iv) Etablissement des relations entre les courants I et les courant de maille i . Par exemple:

$$I_1 = i_\alpha - i_\gamma \qquad I_2 = -i_\alpha + i_\delta \qquad I_3 = i_\alpha \qquad I_4 = i_\beta + i_\alpha$$

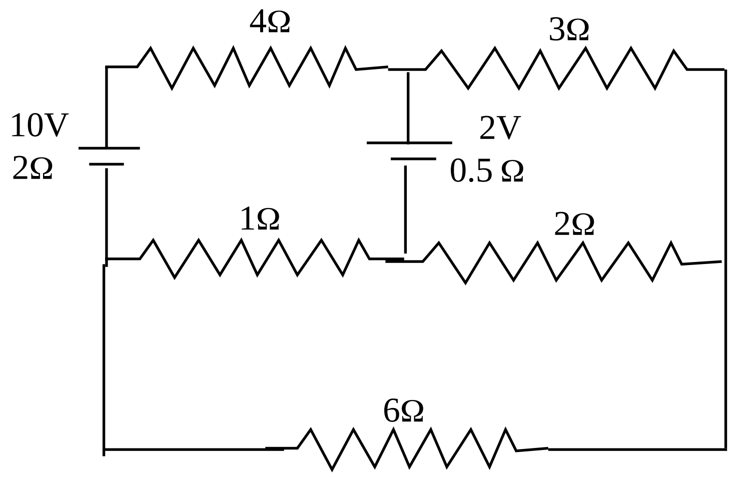
v) Ecriture de la loi des mailles et remplacement des I par leurs expressions en i:

$$-E_1 + R_1 I_1 - E_2 - R_2 I_2 + R_3 I_3 + E_3 - R_4 I_4 + E_4 = 0$$

$$-E_1 + R_1(i_\alpha - i_\gamma) - E_2 - R_2(-i_\alpha + i_\delta) + \dots\dots\dots\dots = 0$$

vi) Résolution des N équations à N inconnues donnant les i et déduction des I.

C'est une méthode systématique, d'autant plus simple que vos machines à calculer résolvent directement les équations linéaires. La difficulté est de choisir le bon nombre de mailles indépendantes. Il est fonction du nombre de noeuds et de branches.....mais ça devient une affaire de spécialiste. Dans les cas que nous traiterons il sera assez évident.



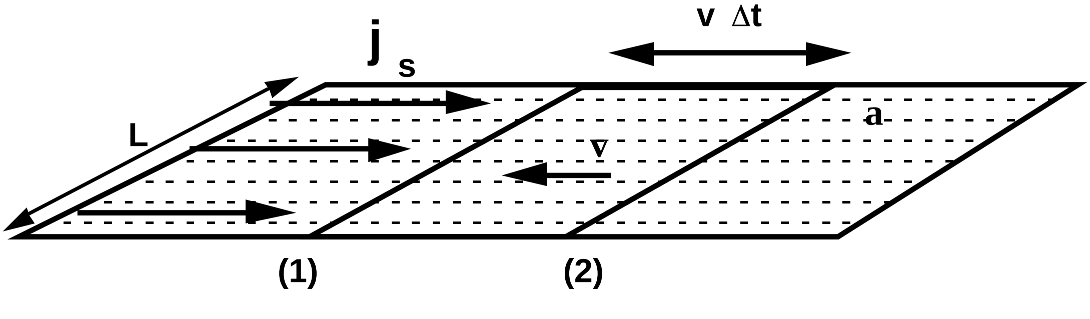
Déterminer à l'aide de cette méthode les courants circulant dans les différentes branches du circuit ci dessus.

VI Courants surfaciques

Nous avons vu plus haut que l'intensité du courant électrique est liée au déplacement de charges et se définit comme la quantité de charge qui franchit une surface par unité de temps.

En fait, pour être plus précis, nous aurions dû parler de courants volumiques puisque ce sont des charges de volume qui se déplaçaient. Nous avons défini le vecteur densité de courant (volumique) comme le produit de la densité de charge volumique ρ et de leur vitesse **j** : $\mathbf{j} = \rho\, \mathbf{v}$.

Nous savons cependant que les charges peuvent être localisées en surface avec densité σ. Le déplacement de ces charges conduit à un nouveau courant dit courant surfacique.



Le courant surfacique est égal à la quantité de charge qui traverse une ligne L, définie dans le plan des charges, pendant l'unité de temps. La ligne L vient se substituer à la surface S traversée par les courants volumiques (par simplicité, nous ne considérons que des lignes perpendiculaire au sens de déplacement des électrons).

Les dN électrons qui franchissent la ligne (1) pendant le temps Δt sont ceux qui étaient contenus à l'instant t dans le rectangle délimité par les lignes (1) et (2) séparées de $l = v_s\, dt$.

Leur nombre est égal à $dN = n_s L v_s \delta t$

et la charge traversée $dQ = n_s q L v_s dt = \sigma v_s L dt$.

L'intensité de courant surfacique est $I = \sigma v_s L$

et le vecteur densité de courant surfacique est défini par:

$$\boxed{\mathbf{j_s} = n_s q \mathbf{v_s} = \sigma \mathbf{v_s}}$$

Il faut bien noter que si les courants volumiques traversaient des surfaces, les courants surfaciques traversent des lignes.