

CHAPITRE VIII

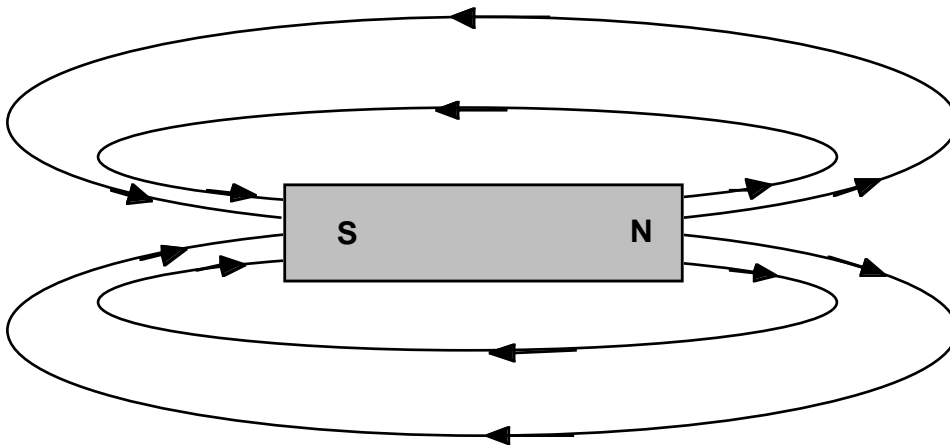
Le champ magnétique

I Les aimants

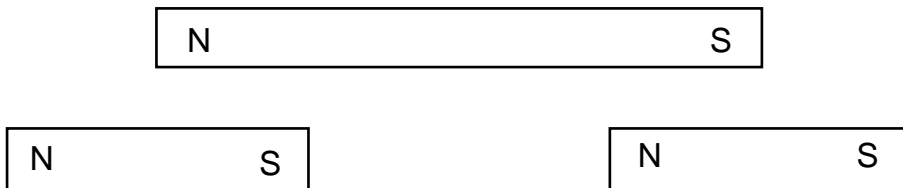
I-1 Les aimants sources de champ magnétique

On distingue deux types de sources de champ magnétique: les aimants et les circuits électriques parcourus par des courants.

Un aimant est caractérisé par un pôle nord et un pôle sud. Les lignes de champ magnétique \mathbf{B} se dirigent du pôle nord vers le pôle sud.



Les pôles d'un aimant sont indissociables. L'aimant brisé produit deux aimants avec chacun son pôle nord et son pôle sud. C'est une différence fondamentale avec l'électrostatique. On ne peut isoler et manipuler indépendamment des entités qui seraient de type plus et des entités qui seraient du type moins.



I-2 Interaction entre les aimants

Des pôles de nature différentes s'attirent alors que des pôles de même nature se repoussent.

De façon générale un aimant s'oriente dans un champ magnétique de telle sorte que la direction sud-nord de cet aimant soit dans la direction du champ magnétique local et donc des lignes de champ créées par les autres aimants.

Où le pôle nord magnétique de la terre se trouve-t-il?

II Champ magnétique créé par les courants: loi de Biot et Savart

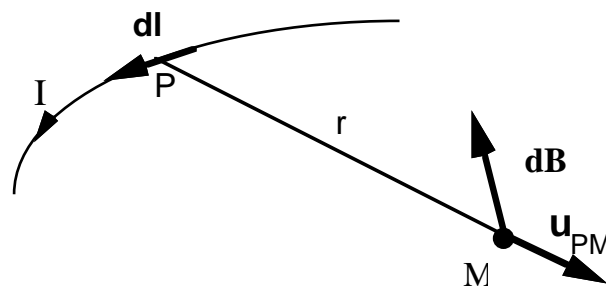
II-1 Loi de Biot et Savart

Nous avons vu en électrostatique que la loi de Coulomb permettait de calculer en un point M les éléments de champ électrique $d\mathbf{E}$ créés par les éléments de charge dq distribués dans l'espace.

La loi équivalente de la magnétostatique doit nous permettre de déterminer en chaque point M de l'espace les éléments de champ magnétique $d\mathbf{B}$ créés par les éléments de courant $d\mathbf{l}$ distribués dans tout l'espace. C'est la loi de Biot et Savart.

Dans un cas comme dans l'autre, le champ total est obtenu en effectuant par intégration la somme des éléments de champ.

Considérons au voisinage du point P un élément de circuit $d\mathbf{l}$ parcouru par un courant I. Le vecteur $d\mathbf{l}$ est orienté dans le sens de circulation du courant. Soit r la distance séparant l'élément $d\mathbf{l}$ du point M où l'on cherche à déterminer le champ magnétique. Soit \mathbf{u}_{PM} le vecteur unitaire parallèle au vecteur \mathbf{PM} .



La loi de Biot et Savart nous enseigne que l'élément de champ magnétique $d\mathbf{B}$ créé au point M par l'élément de fil $d\mathbf{l}$ parcouru par le courant I s'écrit:

$$\mathbf{dB} = \frac{\mu_0 I d\mathbf{l} \wedge \mathbf{u}_{PM}}{4 \pi r^2}$$

En vertu du principe de superposition des champs magnétiques, le champ total créé par l'ensemble des circuits contenus dans l'espace s'écrit:

$$\mathbf{B} = \int_{\text{Circuits}} \frac{\mu_0 I d\mathbf{l} \wedge \mathbf{u}}{4 \pi r^2}$$

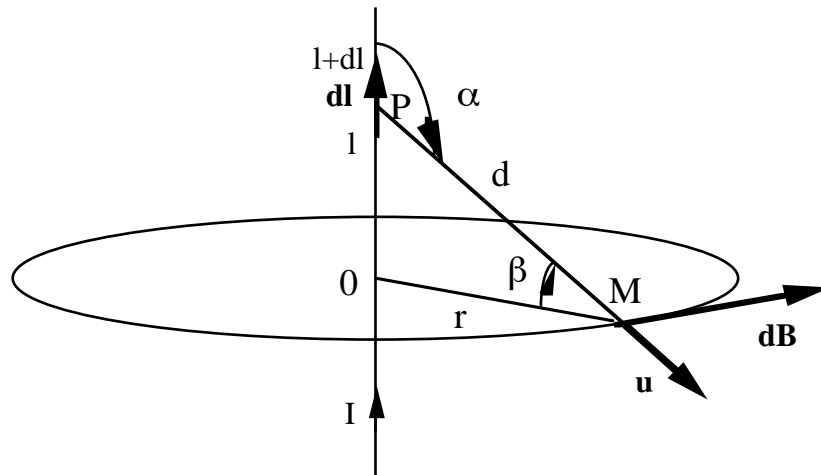
Une telle écriture vectorielle est formelle. Elle est équivalente à trois relations semblables, une par composante.

Si dx , dy et dz sont les composantes de $d\mathbf{l}$, et u_x , u_y , et u_z celles de \mathbf{u} , B_x prend la forme:

$$B_x = \int_{\text{Circuits}} \frac{\mu_0 I (u_z dy - u_y dz)}{4 \pi r^2}$$

Il s'agit d'une intégration le long de circuits, ce qui implique que dy et dz ne sont pas indépendants. Le calcul nécessite donc un paramétrage que l'on effectuera cas par cas, au vu des symétries du problème.

II-2 Champ magnétique créé par un fil rectiligne



Considérons un fil rectiligne vertical parcouru par un courant I .

Soit un élément de fil $d\mathbf{l}$ situé autour du point P entre les cotes l et $l+dl$.

Cet élément, comme toute autre partie du fil, crée en M un élément de champ $d\mathbf{B}$ tangentiel au cercle de rayon OM . Cela signifie que dans un repère cylindrique les composantes totales B_r et B_z de \mathbf{B} sont nulles.

Seule la composante B_θ est différente de 0. Soit:

$$dB_\theta = \frac{\mu_0 I dl \cos \beta}{4 \pi d^2}$$

(en effet $\sin \alpha = \cos \beta$)

Pour sommer tous les éléments de champ, il faut tenir compte du fait que l et β ne sont pas indépendants mais sont liés par la relation: $l = r \tan \beta$ soit $dl = \frac{r}{\cos^2 \beta} d\beta$

Puisque $r^2 = d^2 \cos^2 \beta$, on arrive à:

$$dB_\theta = \frac{\mu_0 I \cos \beta d\beta}{4 \pi r}$$

Pour un fil infini, on intègre β de $-\pi/2$ à $+\pi/2$:

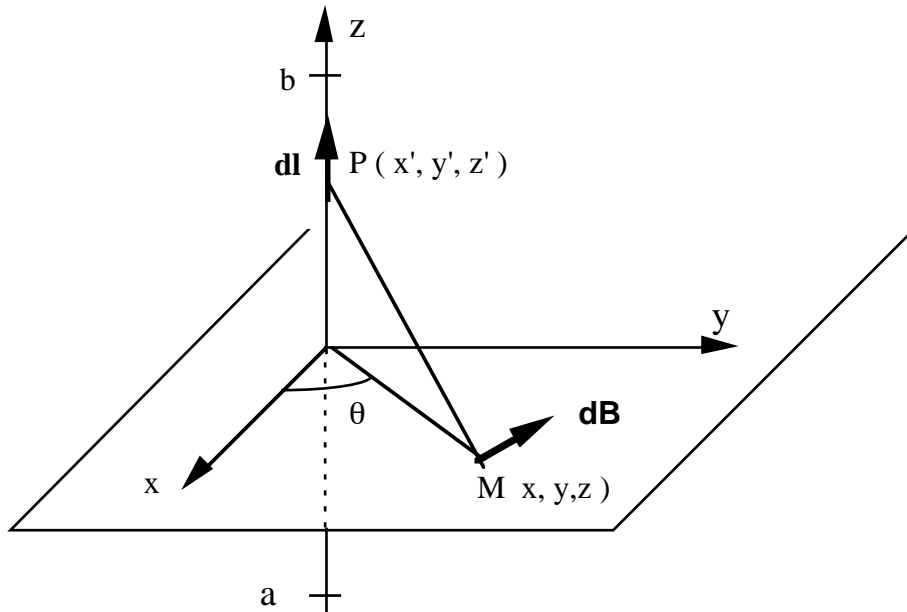
$$B_\theta = \int_{\beta = -\pi/2}^{\beta = +\pi/2} \frac{\mu_0 I \cos \beta d\beta}{4 \pi r} = \frac{\mu_0 I}{4 \pi r} \left[\sin \beta \right]_{\beta = -\pi/2}^{\beta = +\pi/2} = \frac{\mu_0 I}{2 \pi r}$$

On retrouve ainsi l'expression du champ magnétique créé par un fil rectiligne que vous avez rencontré en classe de terminale.

Nous pouvons déterminer par la même méthode, en modifiant seulement les bornes d'intégration, le champ magnétique créé par un fil linéaire de longueur finie.

II-3 Autre façon de calculer le champ magnétique créé par un fil

Nous allons maintenant déterminer le champ magnétique créé par un fil de longueur finie en utilisant l'expression cartésienne de la loi de Biot et Savart.



Les composantes des vecteurs entrant dans cette relation sont:

$$\mathbf{dl} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dz' \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_{PM} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z'^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z' \end{pmatrix} \quad \mathbf{dl} \wedge \mathbf{u}_{PM} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z'^2}} \begin{pmatrix} -ydz' \\ xdz' \\ 0 \end{pmatrix}$$

Et on a pour la composante de \mathbf{B} selon Ox :

$$dB_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{-y dz'}{(x^2 + y^2 + z'^2)^{3/2}}$$

x et y sont les coordonnées de M , point en lequel on cherche le champ magnétique, ils sont donc fixes avec $x^2 + y^2 = r^2$.

Le seul paramètre est z' sur lequel on peut faire porter l'intégration de a à b .

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_a^b \frac{-y dz'}{(r^2 + z'^2)^{3/2}} = -y \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{z'}{r^2 \sqrt{r^2 + z'^2}} \right]_{z'=a}^{z'=b}$$

La limite du fil infini est obtenue en faisant tendre a vers $-\infty$ et b vers $+\infty$ soit:

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{-y}{r^2} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \sin \theta, \quad B_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{x}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cos \theta, \quad B_z = 0$$

ce qui montre bien que le champ magnétique est radial.

III Le potentiel vecteur

III-1 Définition

Nous avons vu en électrostatique que le champ électrique dérivait d'un potentiel $V(r)$ par $\mathbf{E} = -\text{grad}V$. Nous nous étions fortement réjouis de cette propriété qui nous permettait de calculer le champ électrique par le biais d'une grandeur scalaire souvent plus facile à déterminer. Nous avons vu ensuite le rôle de cette grandeur dans le calcul du travail des forces électriques et dans celui de l'énergie potentielle.

Un tel potentiel scalaire n'existe malheureusement pas en magnétostatique.

Il existe par contre un champ de vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ à partir duquel le champ magnétique peut être déduit par la relation:

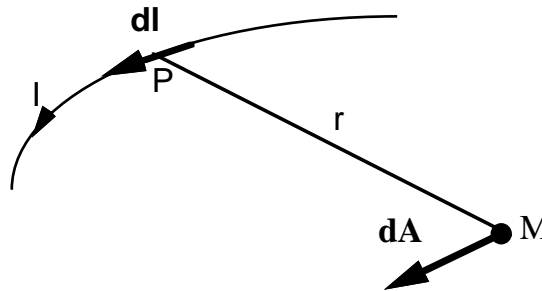
$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$$

Le champ de vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ est appelé potentiel vecteur.

III-2 calcul du potentiel vecteur

Un élément de fil $d\mathbf{l}$ situé au voisinage du point P, parcouru par un courant I, produit au point M un élément de potentiel vecteur $d\mathbf{A}$ défini par:

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l}}{r}$$



Le potentiel vecteur est obtenu par intégration des éléments $d\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{circuit}} \frac{d\mathbf{l}}{r}$$

Du point de vue pratique, \mathbf{A} semble plus simple à calculer que \mathbf{B} puisque l'expression de $d\mathbf{A}$ ne contient pas de produit vectoriel. Il faut néanmoins faire suivre le calcul de \mathbf{A} de celui de son rotationnel, ce qui peut être lourd. Le choix entre le calcul direct de \mathbf{B} et un calcul indirect via \mathbf{A} , se fera en général au vu des difficultés mathématiques rencontrées. Du point de vue physique et en particulier pour ce qui est de l'énergie, le potentiel vecteur joue un rôle similaire à celui du potentiel scalaire.

III-3 Application au fil rectiligne

Vérifier que le champ de vecteur $\mathbf{A}(x,y,z)$ tel que $A_x=0$, $A_y=0$ et $A_z=-\mu_0 I/4\pi \ln(x^2+y^2)$ est le potentiel vecteur du champ magnétique créé par un fil rectiligne parcouru par un courant dirigé suivant oz.

III-4 La divergence de \mathbf{B}

Si vous reprenez les définitions de la divergence et du rotationnel, vous vous apercevrez facilement que la divergence du rotationnel d'un vecteur est toujours nulle. Puisque \mathbf{B} est un rotationnel:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \Rightarrow \text{div } \mathbf{B} = 0$$

C'est une nouvelle équation locale. Notons que si la divergence de \mathbf{B} est toujours nulle, c'est que son flux à travers une surface fermée est nulle (revoir pour cela la démonstration de la forme locale du théorème de Gauss):

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \oiint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Il s'ensuit qu'un champ de vecteur ne peut pas représenter un champ magnétique si sa divergence n'est pas nulle.

III-5 Exemple

Vérifier que la divergence du champ magnétique créé par un fil infini est nulle.

IV- Champs électriques et champs magnétiques

$\text{div } \mathbf{B} = 0$ est à rapprocher de: $\text{rot } \mathbf{E} = 0$. La divergence de \mathbf{B} est nulle parce que \mathbf{B} dérive d'un potentiel vecteur.

Le rotationnel de \mathbf{E} est nul parce que \mathbf{E} dérive d'un potentiel scalaire.

On peut résumer les propriétés des champs électriques et magnétiques en relation avec les potentiels dont ils découlent par le tableau ci-dessous:

	Electrostatique	Magnétostatique
Relation avec le potentiel	$\mathbf{E} = -\text{grad } V$	$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$
Equation locale	$\text{rot } \mathbf{E} = 0$	$\text{div } \mathbf{B} = 0$
Forme intégrale	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$	$\oiint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$

Ce tableau sera complété par un second tableau indiquant les relations dues au fait que les champs décroissent en $1/r^2$.