

**Théorème d'Ampère**

**I Théorème d'Ampère**

I-1 Illustration du théorème d'Ampère sur un cas très particulier

Nous avons vu en électrostatique que l'élément de circulation du champ électrique  $\mathbf{E}$  sur un élément de chemin  $d\mathbf{l}$  se définissait par:

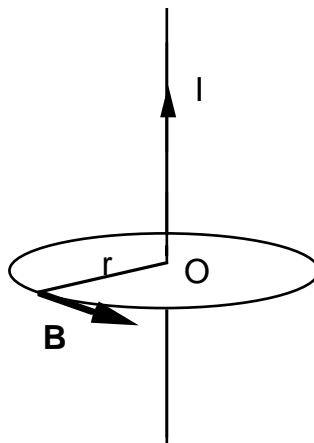
$$\delta C = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

De la même façon, nous définissons un élément de circulation du champ magnétique  $\mathbf{B}$  par:

$$\delta C = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$

La circulation totale en suivant une ligne ( $\Gamma$ ) s'écrit:

$$C = \oint_{(\Gamma)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$



Considérons le chemin  $\Gamma$  fermé, constitué du cercle de centre O et de rayon r orienté comme indiqué sur la figure ci-dessus. En chaque point du cercle,  $\mathbf{B}$  et  $d\mathbf{l}$  sont colinéaires et de même sens. L'élément de circulation est donc simplement  $\delta C = B \cdot dl$ .

Puisque  $B$  est constant sur tout le cercle et ne dépend que du rayon r, la circulation totale du champ magnétique sur le cercle est  $2\pi r B(r)$ .

Vu l'expression de  $B(r)$ , la circulation le long du cercle s'écrit:

$$C = \oint_{(\Gamma)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$$

La circulation de  $\mathbf{B}$  est indépendante du rayon du cercle. Elle est égale au produit de  $\mu_0$  par le courant I

#### IV-2 Origine du théorème d'Ampère.

L'origine du théorème d'Ampère apparaît nettement sur ce cas particulier. Il tient au fait que le champ créé par un fil décroît comme  $1/r$  alors que le périmètre du cercle sur lequel on effectue la circulation de  $\mathbf{B}$  croît comme  $r$ . Le produit de  $B$  et du périmètre du cercle est constant.

Or, si on remonte un peu plus haut, la décroissance en  $1/r$  du champ magnétique créé par un fil rectiligne infini est la conséquence directe de la décroissance en  $1/r^2$  qui apparaît dans la loi de Biot et Savart.

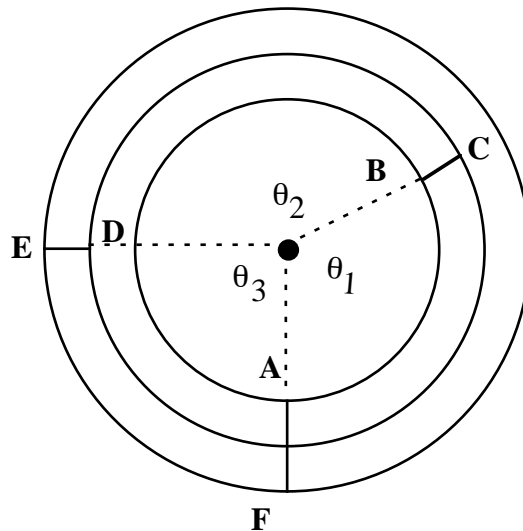
Le théorème d'Ampère est en magnétostatique le pendant de ce qu'est le théorème de Gauss en électrostatique. Tous deux tiennent au fait que les champs décroissent en  $1/r^2$  avec la distance qui les sépare de leur source.

Comme nous avons généralisé le théorème de Gauss à une surface et à une distribution de charges quelconque, nous allons généraliser le théorème d'Ampère à un circuit et à une distribution de courants quelconque.

#### IV-3) Théorème d'Ampère sous sa forme générale

Considérons le circuit fermé ABCDEFA dans un plan perpendiculaire au fil. AB est un arc de cercle de rayon  $r_1$  et d'angle  $\theta_1$ . BC (comme DE et FA) sont des segments radiaux. BD est un arc de cercle de rayon  $r_2$  et d'angle  $\theta_2$ . EF est un arc de cercle de rayon  $r_3$  et d'angle  $\theta_3$ .

Quelles que soient les positions de A,B,C,D,E ou F, la somme des angles  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 2\pi$ .



La circulation de  $\mathbf{B}$  sur un arc de cercle tel que AB est:

$$C_{AB} = r_1 \theta_1 B_1 = r_1 \theta_1 \mu_0 I / 2\pi r_1 = \theta_1 \mu_0 I / 2\pi$$

De même:

$$C_{CD} = \theta_2 \mu_0 I / 2\pi \quad C_{EF} = \theta_3 \mu_0 I / 2\pi$$

La circulation de  $\mathbf{B}$  le long d'un rayon est nul puisque en chaque point  $\mathbf{B}$  est perpendiculaire au déplacement:

$$C_{BC} = C_{DE} = C_{FA}$$

La circulation totale, somme des circulations élémentaires est égale à:

$$C = (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \mu_0 I / 2\pi = \mu_0 I$$

Puisque un chemin quelconque d'un plan peut toujours être assimilé à une succession d'arcs de cercle et de segments radiaux, on peut dire que la circulation de  $\mathbf{B}$  sur un circuit fermé contenu dans un plan perpendiculaire au fil et entourant le courant  $I$  est

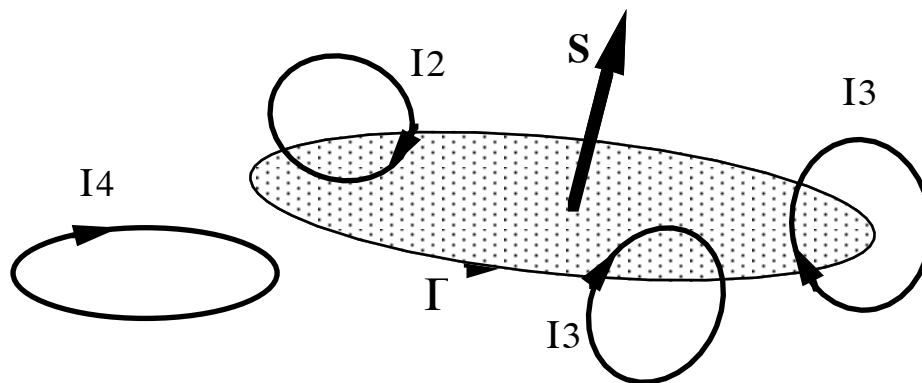
$\mu_0 I$ . On peut étendre cette propriété à un circuit non contenu dans le plan puisque la composante de  $\mathbf{B}$  suivant la direction du fil est nulle. Tout élément de circulation de  $\mathbf{B}$  le long d'un chemin parallèle à  $I$  est nulle.

En fait le théorème d'Ampère est beaucoup plus général. Il s'adresse à toute courbe fermée et est valable pour toute sorte de distribution de courant.

Il s'énonce ainsi:

La circulation du champ magnétique  $\mathbf{B}$  le long d'une courbe fermée qui embrasse des courants  $I_1, I_2, I_3, \dots$  est égale à  $\mu_0 I$  où  $I$  est la somme algébrique des courants.

Les courants sont comptés positivement s'ils coupent la surface soutendue par le circuit selon le sens positif tel qu'il résulte de l'orientation du circuit fermé.



Soit le système composé d'un ensemble de circuits parcourus par les courants  $I_1, I_2, I_3, I_4$ .

Considérons un circuit d'Ampère (non physique)  $\Gamma$  orienté. Le sens positif du circuit  $\Gamma$  implique le sens positif de la surface (en gris) qui s'appuie sur le circuit orienté.

Les courants  $I_1, I_2, I_3$  coupent la surface qui s'appuie sur  $\Gamma$ . Les courants  $I_1$  et  $I_3$  sont comptabilisés positivement puisqu'ils coupent la surface fermée selon son sens positif et  $I_2$  est comptabilisé négativement puisqu'il traverse la surface dans le sens opposé. (Les points d'intersection entre la surface supportée par le circuit et les boucles de courant correspondent aux extrémités des flèches).

Remarque: la surface sous-tendue par le circuit ( $\Gamma$ ) est quelconque. Elle n'a nul besoin d'être plane. ( $\Gamma$ ) n'est d'ailleurs pas nécessairement lui-même contenu dans un plan.

## **II Application du théorème d'Ampère à la détermination d'un champ magnétique**

### II-1 Principe d'application du théorème d'Ampère

Si le théorème d'Ampère est toujours valable, il n'est de fait utilisable que dans des cas géométriques très particuliers.

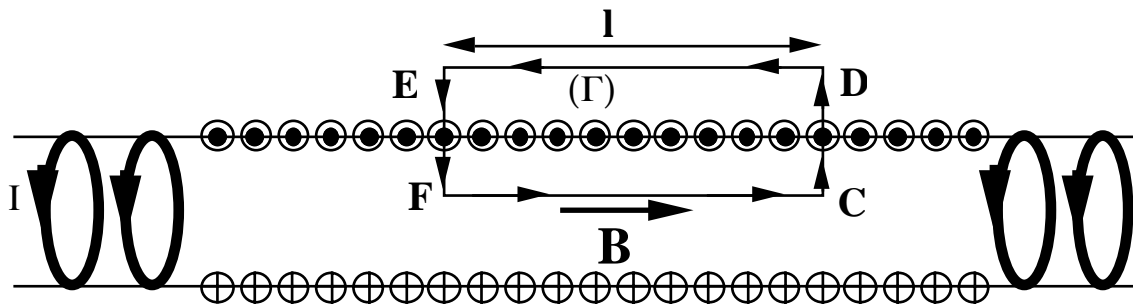
Il est essentiellement utilisable sur des circuits le long desquels  $\mathbf{B}$  est constant "par morceaux" et se trouve orienté le long du chemin ou perpendiculairement à ce chemin.

## II-2 Champ créé par un solénoïde infini

Considérons un solénoïde infini à  $n_1$  tours/mètre, parcouru par un courant  $I$ .

Nous savons a priori et par suite de considérations de symétrie que, à l'intérieur du solénoïde, le champ  $\mathbf{B}$  est uniforme et orienté suivant l'axe. Nous savons par ailleurs que  $\mathbf{B}$  est nul à l'extérieur.

Considérons le circuit rectangulaire CDEF dont le sens de parcours est fléché. Suivant la règle du tire bouchon, la surface qui s'appuie sur ce circuit est orientée vers l'avant.



Appliquons le théorème d'Ampère à ce circuit:

La circulation du champ magnétique se réduit à  $B l$ :

Les circulations le long de CB et EF sont nulles puisque le champ magnétique est en tout point perpendiculaire au déplacement.

La circulation le long de DE est nulle puisque à l'extérieur le champ est nul.

Le long de FC,  $\mathbf{B}$  est orienté parallèlement au circuit et est orienté dans le même sens.

La somme des courants traversant la surface rectangle est  $n_1 l I$ . De plus, comme indiqué sur la figure, ils coupent la surface dans un déplacement vers l'avant, c'est à dire selon le sens positif de cette surface.

L'application du théorème d'Ampère conduit à:

$B \cdot l = \mu_0 n_1 I l$  soit  $B = \mu_0 n_1 I$ , ce qui est la formule bien connue du champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde infini.

## III Théorème d'Ampère sous sa forme locale

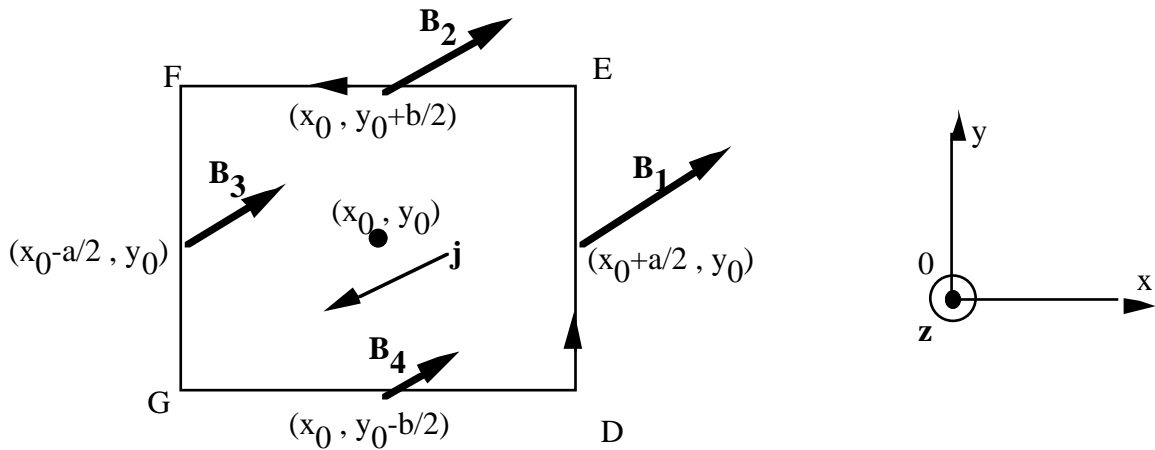
### III-2 Forme locale du théorème d'Ampère

Considérons dans le plan  $x_0 y_0$  un circuit rectangulaire DEFG centré autour du point de composantes  $(x_0, y_0)$ . Les côtés du rectangle sont  $a$  et  $b$ .  $a$  et  $b$  sont infiniment petits.

Le champ électrique  $\mathbf{B}$  est noté  $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4$  sur les branches DE, EF, FG, GH du circuit.

Un courant, de densité de courant  $\mathbf{j}$  traverse ce cadre. Le vecteur  $\mathbf{j}$  a comme composante  $j_x, j_y, j_z$ .

Imposons un sens positif au circuit DEFG, ce qui revient à orienter la surface  $\mathbf{S}$  selon la règle du tire-bouchon. Telle qu'est fixée l'orientation du circuit, le vecteur surface  $\mathbf{S}$  est dirigé vers l'avant, c'est-à-dire vers les  $z$  positifs.



Ses composantes sont:  $\mathbf{S} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{ab} \end{vmatrix}$

L'intensité de courant traversant le cadre est égale à  $I = \mathbf{j} \cdot \mathbf{S}$  soit  $I = j_z ab$   
 Le théorème d'Ampère nous apprend que :

$$\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{DE} + \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{EF} + \mathbf{B}_3 \cdot \mathbf{FG} + \mathbf{B}_4 \cdot \mathbf{GE} = \mu_0 \mathbf{j} \cdot \mathbf{S} = \mu_0 j_z S$$

Déterminons  $\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{DE} + \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{FG}$

Puisque  $\mathbf{DE}$  est un vecteur de norme  $b$  orienté selon  $0y$ :

$$\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{DE} = B_y(x_0+a/2, y_0) b$$

Puisque  $\mathbf{FG}$  est un vecteur de norme  $b$  orienté selon  $-0x$ :

$$\mathbf{B}_3 \cdot \mathbf{FG} = -B_y(x_0-a/2, y_0) b$$

$a$  étant petit, on peut déterminer  $B_y(x_0+a/2, y_0)$  à partir de  $B_y(x_0, y_0)$  par le développement de Taylor:

$$B_y\left(x_0 + \frac{a}{2}, y_0\right) = B_y(x_0, y_0) + \frac{a}{2} \frac{\partial B_y}{\partial x}(x_0, y_0)$$

De même:

$$B_y\left(x_0 - \frac{a}{2}, y_0\right) = B_y(x_0, y_0) - \frac{a}{2} \frac{\partial B_y}{\partial x}(x_0, y_0)$$

soit :

$$\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{DE} + \mathbf{B}_3 \cdot \mathbf{FG} = b a \frac{\partial B_y}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Le même raisonnement reproduit sur les éléments de chemin  $\mathbf{EF}$  et  $\mathbf{GH}$  conduit à:

$$\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{EF} + \mathbf{B}_4 \cdot \mathbf{GD} = -b a \frac{\partial B_x}{\partial y}(x_0, y_0)$$

soit sur l'ensemble du circuit fermé et après simplification par  $S$ :

$$\mu_0 j_z = \left[ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right]$$

qui pour tout circuit infiniment petit se généralise à:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

C'est la forme locale du théorème d'Ampère. Dans le vide  $\mathbf{j}=0$  et:

$$\text{rot } \mathbf{B} = 0$$

### III-2 Théorème de Stokes-Ampère

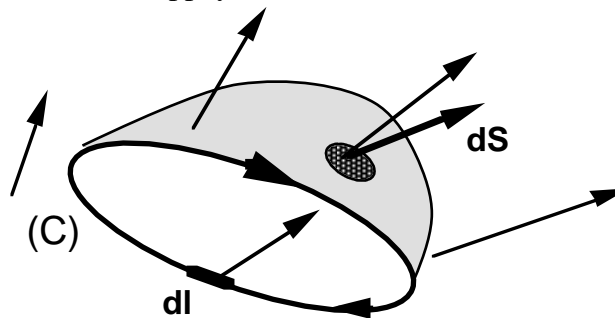
Nous venons de montrer que la circulation de  $\mathbf{B}$  sur le circuit rectangulaire orienté était égal au flux de ce vecteur à travers la surface orientée s'appuyant sur le circuit.

C'est un résultat tout à fait général qui s'applique à tout champ de vecteur  $\mathbf{a}$ .

Soit un champ de vecteur  $\mathbf{a}$ .

Un circuit orienté (C)

Une surface orientée S s'appuyant sur le circuit.



Le théorème de Stokes-Ampère nous apprend que la circulation de  $\mathbf{a}$  le long d'un circuit (C) est égal au flux du rotationnel de  $\mathbf{a}$  à travers toute surface s'appuyant sur (C).

$$\oint \mathbf{A} \, d\mathbf{l} = \iint \text{rot } \mathbf{A} \, d\mathbf{S}$$

### III 3 Exemple d'application du théorème de Stokes-Ampère

Considérons le champ de vecteur défini par  $A_x=0$ ,  $A_y=0$ ,  $A_z=4x$ . Vérifier le théorème de Stokes-Ampère sur un circuit rectangulaire placé dans le plan (xOy), de côtés  $a=2$ ,  $b=3$ , centré en  $(x=1, y=0)$  et sur la surface plane que ce circuit définit.

## IV Franchissement d'une nappe de courant

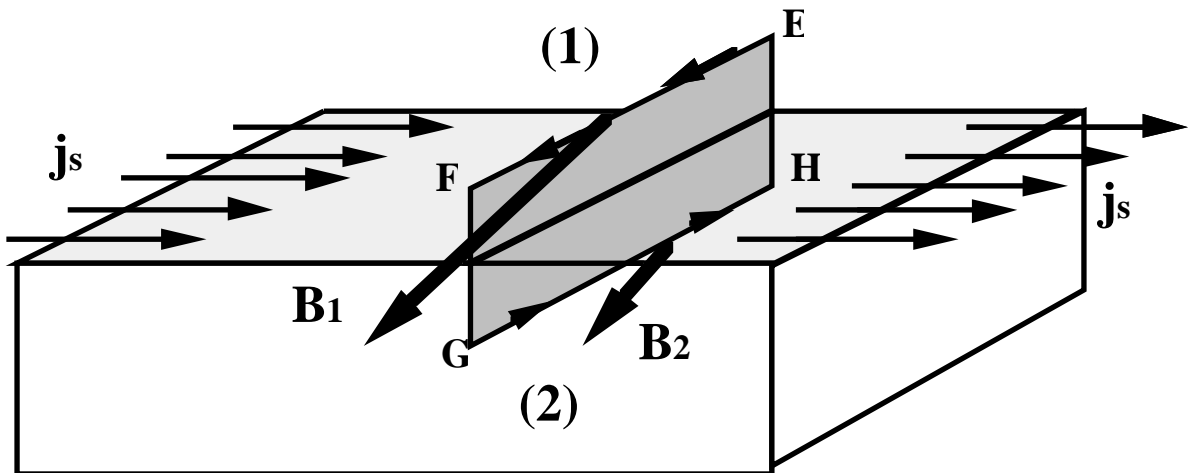
IV -1 Discontinuité du champ magnétique lors de la traversée d'une nappe de courant.

C'est un problème très semblable à celui que nous avons abordé au chapitre IV. Nous avons montré que, lors de la traversée d'une surface chargée, la composante tangentielle du champ électrique était continue alors que la composante normale subissait une discontinuité égale à  $\sigma/\epsilon_0$ .

Nous allons montrer ici que lors de la traversée d'une nappe de courant, la composante normale du champ magnétique est continue alors que la composante tangentielle subit une discontinuité égale à  $\mu_0 \mathbf{j}_s$ .

Considérons un courant surfacique de densité  $\mathbf{j}_s$  s'écoulant sur la surface grisée de la figure ci-dessous.

Les champs magnétiques  $\mathbf{B}_1$  et  $\mathbf{B}_2$  en deux points infiniment proches situés de part et d'autre de la nappe de courant sont représentés par les flèches en trait gras. Ces champs magnétiques sont dus à la fois à la nappe de courant  $\mathbf{j}_s$  et à des courants externes à cette nappe situés relativement loin. Cela signifie que la modification de  $\mathbf{B}$  lors traversée de la nappe n'est due qu'à la nappe elle-même. La modification due aux autres courants est insignifiante puisque les courants sont loin et que les points (1) et (2) sont infiniment proches.



Appliquons le théorème d'Ampère au circuit EFGH orienté selon le sens indiqué. Pour simplifier la démonstration, nous avons choisi un circuit particulier placé perpendiculairement au vecteur densité de courant. Vu cette orientation, la surface grisée sombre est représentée par un vecteur  $\mathbf{S}$  de sens parallèle à  $\mathbf{j}_s$ .

Le théorème d'Ampère nous dit que la circulation de  $\mathbf{B}$  le long d'une ligne fermée est égale au courant embrassé par ce circuit multiplié par  $\mu_0$ .

Le courant embrassé est dû au courant de surface. Ce courant entouré par le circuit est  $\mu_0 j_s L$  où  $L = EF = HG$ .

La circulation de  $\mathbf{B}$  sur les éléments de circuit FG et HE peut être considérée comme nulle car F et G sont infiniment proches; la distance  $FG = HE \approx 0$ .

Reste la circulation de  $\mathbf{B}$  sur les éléments EF et GH. Le théorème d'Ampère conduit à:

$$EF \cdot \mathbf{B}_1 + GH \cdot \mathbf{B}_2 = \mu_0 j_s L$$

Pour repérer les vecteurs, nous avons introduit un trièdre (Oxyz) direct, tel que la normale sortante  $n_{21}$  soit orientée suivant l'axe des z, et la densité de courant  $\mathbf{j}_s$  suivant Oy.

$GH \cdot \mathbf{B}_2$  est égal à  $-B_{2t} L$  où  $B_{2t}$  est la composante de  $\mathbf{B}_2$  tangentielle à la surface le long de la ligne perpendiculaire au déplacement du courant de surface. C'est la composante de  $\mathbf{B}_2$  suivant Ox.

$EF \cdot \mathbf{B}_1$  est égal à  $+B_{1t} L$  où  $B_{1t}$  est la composante de  $\mathbf{B}_1$  tangentielle à la surface le long de la même ligne.

Soit après simplification:

$$B_{1t} - B_{2t} = \mu_0 j_s$$

Dans le cas général où la composante tangentielle de  $\mathbf{B}$  n'est pas perpendiculaire au courant de surface, cette relation se généralise à:

$$\mathbf{B}_{1t} - \mathbf{B}_{2t} = \mu_0 \mathbf{j}_s \wedge \mathbf{n}_{21}$$

$\mathbf{B}_{2t}$  et  $\mathbf{B}_{1t}$  sont les vecteurs projection de  $\mathbf{B}_2$  et  $\mathbf{B}_1$  sur la nappe de courant.  $\mathbf{n}_{21}$  est le vecteur unitaire, normale sortante dirigé de (1) vers (2).

Vérifier que le cas particulier que nous avons considéré s'inscrit bien dans le cas général.

### V Théorème de Gauss et théorème d'Ampère

Comme nous l'avons vu, ces théorèmes tiennent à la forme en  $1/r^2$  des champs électriques et magnétiques. Nous rassemblons ici leurs conséquences sous l'aspect global (forme intégrale), local et de franchissement de surface. Les discontinuités de champs électriques et magnétiques aux surfaces peuvent vous paraître un peu difficiles et lourdes. Elles joueront un rôle prépondérant dans les matériaux magnétiques et diélectriques. Un spécialiste d'ondes radio dans le vide pourrait les ignorer. Un ingénieur matériaux ne peut pas y échapper

Conséquence de la décroissance en $1/r^2$ des champs électriques et magnétiques		
	Electrostatique GAUSS	Magnétostatique AMPERE
Forme intégrale	$\oiint \mathbf{E} \, d\mathbf{S} = \frac{\sum_i Q_i}{\epsilon_0}$	$\oint \mathbf{B} \, d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_i I_i$
Forme locale	$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$
Discontinuités (les autres composantes sont continues)	$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{n}_{12} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$	$\mathbf{B}_{t2} - \mathbf{B}_{t1} = \mu_0 \mathbf{j}_s \wedge \mathbf{n}_{12}$