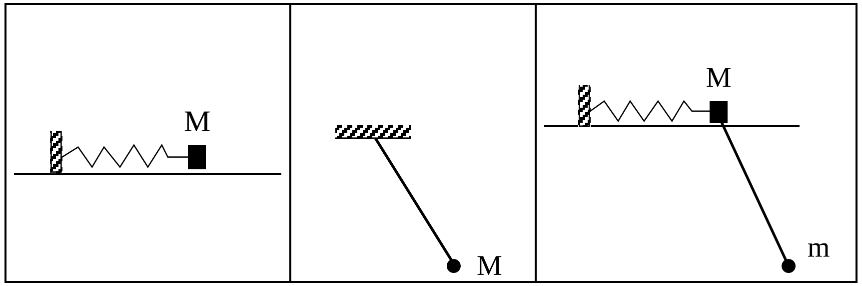
Annexe : Formalismes Lagrangien et Hamiltonien

I Les équations de Lagrange

I-1 Les coordonnées généralisées.

Un système matériel est repéré par un ensemble de coordonnées indépendantes qui peuvent être des positions, des angles ou un plus généralement un ensemble de positions et d'angles que l'on regroupe sous le vocable de coordonnées généralisées q_i.



Déterminer les coordonnées généralisées des systèmes ci dessus.

I-2 Le lagrangien

Le lagrangien d'un système est une fonction explicite des coordonnées généralisées q_i , de leurs dérivées par rapport au temps $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$ (vitesses généralisées) et du temps t.

$$L(q_i, \dot{q}_i, t)$$

Sachant que les coordonnées généralisées $q_i(t)$ et les vitesses généralisées $\dot{q}_i(t)$ dépendent elles aussi du temps, le lagrangien dépend aussi indirectement du temps à travers de ces grandeurs.

Lorsque les forces qui s'appliquent sur le système dérivent d'un potentiel, le lagrangien s'écrit comme la différence entre l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle V.

Déterminer le lagrangien des systèmes ci dessus. On montrera en particulier que pour le troisième système:

Supraconductivité: un condensât de Physique (Ecole des Mines de Nancy / Séminaire IFR matériaux 23-24 juin 2003-Ph. Mangin)

$$T = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2} ml\,\dot{\theta}^2 - l\cos\theta\,\dot{x}\,\dot{\theta} \qquad V = \frac{1}{2}k\,x^2 - mgl\cos\theta$$

I-3 Les équations de Lagrange

L'évolution spatio-temporelle d'un système mécanique obéit aux équations de Lagrange:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0}$$

Quel que soit le choix des coordonnées généralisées

Déterminer les équations du mouvement des 3 systèmes.

II L'impulsion généralisée

On appelle impulsion généralisée couplée à la variable q_k, la grandeur p_k définie par:

$$p_k = \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial \dot{q}_k}$$

On dit aussi que p_k et q_k sont des variables *conjuguées.*

Déterminer les impulsions généralisées des 3 systèmes.

III Fonction de Hamilton

III-1 Définition

On appelle fonction de Hamilton ou hamiltonien d'un système mécanique la grandeur:

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_i p_i\,\dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t)$$

Montrer à partir des exemples ci dessus que l''hamiltonien se confond donc avec l'énergie, du moins tant que l'énergie dérive d'un potentiel.

III-2 Transformation de Legendre

Le passage du lagrangien à l'hamiltonien s'appelle une transformation de Legendre. Donnez d'autres exemples de transformation de Legendre.

III-3 Equations de Hamilton-Jacobi

Montrer que la différentielle totale de H,

$$dH = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

S'écrit aussi:

$$dH = \sum_i \dot{q}_i \, dp_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

et conduit aux équations canonique de hamilton-Jacobi:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \text{et} \qquad \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Montrer que avec $H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + V(r_i)$, les équation de Hamilton-Jacobi sont équivalentes aux équations de Newton.

IV le principe de moindre action

IV-1 Les postulats de la physique

Les lois d'une théorie physiques sont de façon générale postulées à partir de faits expérimentaux restreints et sont validées par l'observation des résultats qu'elles prédisent. C'est le cas de la loi fondamentale de la dynamique **F**=m**a**.

Souvent on réalise quelque temps plus tard qu'il aurait été possible de poser des postulats équivalents ou mieux encore plus généraux qui prédisent tout aussi bien les résultats de la physique et dont les premiers postulats ne sont que des conséquences.

C'est pour la mécanique les équations de Lagrange.

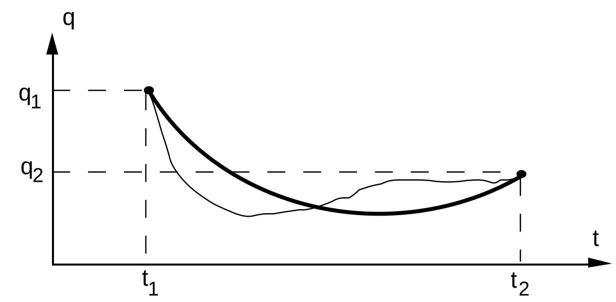
Pourquoi n'a on pas commencé par ces postulats? La réponse est ici évidente: ils sont beaucoup moins intuitifs et mathématiquement plus fouillés.

Avouez cependant un malaise devant ces équations: on ne sent pas bien la physique. On aurait aimé des postulats s'appuyant sur un concept général, par exemple de symétrie, d'invariance d'une grandeur ou de minimisation de quelque chose.

Le postulat de la mécanique analytique qui satisfait à cette exigence est connu sous le nom de principe de moindre action.

IV-2 Enoncé du principe de moindre action

Parmi tous les chemins joignant 2 points d'espace temps (q_1, t_1) et (q_2, t_2) fixés, celui qui est effectivement réalisé est celui pour lequel une fonction appelée action est stationnaire (extrémale, le plus souvent minimale).



Voila un principe qui respire la généralité, encore faut-il le préciser et pourquoi pas le justifier intuitivement.

IV-3 L'action

On appelle action S_C correspondant au chemin C, l'intégrale sur le chemin C du lagrangien $L(q_i, \dot{q}_i, t)$

$$S = \int_1^2 L(q_i, \dot{q}_i, t)\, dt$$

IV-4 Les équations de Lagrange

Imaginons un chemin C', voisin du chemin C.

Alors que sur C, au temps t, les coordonnées généralisées étaient q_i, elles deviennent au même temps t q_i' sur C', avec:

$$q_i'(t) = q_i(t) + \delta q_i(t)$$

Avec selon notre postulat, aux point extrêmes:

$$q_i(t_1) = q_i'(t_1) \quad \text{et} \quad q_i(t_2) = q_i'(t_2)$$

soit:

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$$

Dire que S est stationnaire sur le chemin réel, signifie que le passage du chemin C à un chemin C' voisin pour lequel S' = S + δS, avec δS = 0.

Lors du passage de C à C', en t

$q_i(t)$ passe à $q_i'(t) = q_i(t) + \delta q_i(t)$

$\dot{q}_i = \dfrac{dq_i}{dt}$ passe à $\dot{q}_i' = \dot{q}_i + \dfrac{d\,\delta q_i}{dt}$

L passe à L' = L + δL

$$\delta S = \int_1^2 \delta L \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right] dt$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\,\delta q_i}{dt} \right] dt$$

Soit en intégrant par partie le deuxième terme:

$$\delta S = \left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \delta q_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] dt$$

Le terme tout intégré est nul puisque les points extrémaux sont fixes et le deuxième terme doit être nul quelque soit δq_i.

Il s'en suit les équations de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

V Relation avec la mécanique quantique

Le principe de moindre action de la mécanique rappelle le principe de Fermat de l'optique. Le principe de Fermat stipule que le chemin suivi par un rayon lumineux est

stationnaire ou, en d'autres termes, que le rayon lumineux suit un chemin pour lequel la différence de phase entre les points origines et extrémité est stationnaire.

En physique quantique, une particule d'impulsion **p** et d'énergie E est décrite par une onde ψ (**r**,t)

$$\psi(\mathbf{r},t) = a(\mathbf{r},t) \exp\ i\left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar}\mathbf{r} - \frac{E}{\hbar} t \right)$$

où a(**r**,t) varie lentement, alors que le facteur de phase, en raison de la division par ħ, varie très rapidement.

la fonction d'onde d'une particule qui effectue un chemin d**r** au cours du temps dt voit sa phase varier de δφ = E dt - **p**d**r.**

La différence de phase entre les points origine (1) et extrémité (2) est donc:

$$\Delta\varphi = \int_1^2 E dt - \mathbf{p}\, d\mathbf{r}$$

Ou en remplaçant E par H, **r** par $q_i = \dot{q}_i$ dt et **p** par p_i, on obtient:

$$\Delta\varphi = \int_1^2 L\, dt$$

VI Le champ électromagnétique

VI-1:Lagrangien d'une particule dans un champ électromagnétique

Les équation de Lagrange conduisent naturellement aux équations du mouvement. Lorsque le système est constitué d'une particule plongée dans un champ électromagnétique, elles doivent conduire à:

$$\mathbf{F} = q\,(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$$

On peut aisément vérifier que le Lagrangien

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + q\,\dot{\mathbf{r}}\,\mathbf{A}(\mathbf{r},t) - q\,U(\mathbf{r},t)$$

permet de retrouver les équations du mouvement.

On a en effet:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + q A_x(\mathbf{r},t)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \left[q\ \dot{x} \frac{\partial A_x(\mathbf{r},t)}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial A_y(\mathbf{r},t)}{\partial x} + \dot{z} \frac{\partial A_z(\mathbf{r},t)}{\partial x} \right] - q \frac{\partial U(\mathbf{r},t)}{\partial x}$$

et en tenant compte de:

$$\frac{d}{dt} f(t, q_i, \dot{q}_i) = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial f}{\partial q_i} + \sum_i \ddot{q}_i \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}$$

on obtient:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} + q\left(\frac{\partial A_x}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)$$

Soit aussi:

$$m\ddot{x} = -q\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} + \dot{y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \dot{z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)$$

qui n'est autre que la composante suivant x de la relation $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$, en se souvenant que $\mathbf{B} = \mathbf{rot}\,(\mathbf{A})$

VI-2: Impulsion d'une particule dans un champ électromagnétique

La forme du lagrangien $L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$ étant justifiée:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + q\,\dot{\mathbf{r}}\,\mathbf{A}(\mathbf{r},t) - q\,U(\mathbf{r},t)$$

on peut déterminer les composantes p_x, p_y, p_z de l'impulsion **p** qui par définition s'écrivent:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \qquad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \qquad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}$$

Soit, vectoriellement:

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)}{\partial \dot{\mathbf{r}}}$$

On trouve immédiatement:

$$\mathbf{p} = m\,\mathbf{v} + q\,\mathbf{A}$$

VI-3 Energie cinétique

L'énergie cinétique de la particule s'écrit toujours:

$$E_c = \frac{1}{2} m\,\mathbf{v}^2$$

avec maintenant:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p} - q\mathbf{A}}{m}$$

VI-4 Fonction de Hamilton

Par définition, la fonction de hamilton s'écrit:

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \sum_i \mathbf{p}\,\dot{\mathbf{r}} - L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$$

et on trouve:

$$H = \frac{1}{2m}\left[\mathbf{p} - q\,\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\right]^2 + q\,U(\mathbf{r},t)$$

(pour se convaincre, on peut remplacer les variables vectorielles par 3 variables qui sont leurs composantes, et travailler composante par composante)

cette fonction prend la forme développée:

$$H = \frac{1}{2m}\left[\mathbf{p} - q\,\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\right]\left[\mathbf{p} - q\,\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\right] + q\,U(\mathbf{r},t)$$

VI-3 Hamiltonien d'une particule dans un champ électromagnétique

Selon le principe de correspondance, c'est bien à l'impulsion généralisée **p** que correspond l'opérateur $\frac{\hbar}{i}\nabla$ et on passe de la fonction de Hamilton à l'opérateur hamiltonien par simple substitution, à condition d'effectuer la substitution sur la forme développée:

$$\widehat{\mathbf{H}} = \frac{1}{2m}\left[\frac{\hbar}{i}\nabla - q\,\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\right]\left[\frac{\hbar}{i}\nabla - q\,\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\right] + q\,U(\mathbf{r},t)$$

Le respect de l'ordre des opérations est impératif en raison d'éventuels problèmes de commutation.

$$\widehat{\mathbf{H}}\,\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi - \frac{q\,\hbar}{i}\left[\nabla(\mathbf{A}\,.\,\psi) + \mathbf{A}\,\nabla(\psi)\right] + \frac{q^2}{2m}\mathbf{A}^2\,\psi + q\,U(\mathbf{r},t)\,\psi$$

Petite remarque: $\nabla(\mathbf{A}\,.\,\psi) = \psi\,\nabla.\mathbf{A} + \mathbf{A}\,\nabla\psi$ qui ressemble à la dérivée d'un produit, signifie tout de même:

$$\mathbf{grad}\,(\mathbf{A}\,.\,\psi) = \psi.\mathrm{div}\,\mathbf{A} + \mathbf{A}.\,\mathbf{grad}\,\psi$$