

## CHAPITRE II

### Théorie de London

#### I Introduction

Les équations de London constituent la première approche phénoménologique du comportement électromagnétique des supraconducteurs. Elles furent publiées en 1935 par deux frères, Fritz et Heinz London. Ils faisaient partie des réfugiés allemands qui avaient fui le régime nazi et s'étaient installés en Angleterre. Fritz, l'aîné, était théoricien. Heinz, le cadet, était expérimentateur. Fritz avait été intrigué par la publication de Meissner qui montrait qu'à l'intérieur d'un supraconducteur, le champ magnétique  $\mathbf{B}$  restait nul, quelle que soit l'histoire thermique et magnétique de l'échantillon. Il avait abordé l'aspect thermodynamique mais avait été doublé par Gorter et Casimir. Les frères London avaient cependant bien compris que l'effet clé de la supraconductivité n'était pas la chute à zéro de la résistance électrique, mais était l'exclusion du champ magnétique dans l'échantillon.

Les équations de Maxwell qui ont consacré l'électromagnétisme s'avèrent incapables par elles seules de rendre compte de la nullité du champ magnétique dans le supraconducteur. Elles montrent tout au plus que dans un conducteur parfait le champ magnétique ne peut pas varier.

Or un supraconducteur n'est pas un simple conducteur parfait. Pour rendre compte de l'exclusion du champ magnétique, il faut ajouter un ingrédient supplémentaire aux équations de Maxwell. C'est ce qu'ont fait F et H. London avec les deux équations qui portent leur nom.

#### II Le conducteur parfait

##### II-1 Introduction

C'est vrai que, du point de vue électrique, le supraconducteur apparaît à première vue comme un conducteur parfait, qui n'offre aucune résistance au passage du courant puisque, une fois lancé dans un anneau supraconducteur, le courant ne s'amortit pas. Il paraît logique d'examiner tout d'abord l'effet d'un champ magnétique sur un conducteur parfait dans le cadre des équations de Maxwell:

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad \text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

auxquelles sont associées les équations de continuité:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{t1} &= \mathbf{E}_{t2} & (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{n}_{12} &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \\ (\mathbf{B}_{t2} - \mathbf{B}_{t1}) \wedge \mathbf{n}_{12} &= \frac{\mathbf{j}_s}{\epsilon_0} & (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n}_{12} &= 0 \end{aligned}$$

en se souvenant que  $\rho$  et  $\mathbf{j}$  concernent toutes les charges et tous les courants (de polarisation et d'aimantation compris)

Aux relations de Maxwell, ajoutons la loi de conservation des charges:

$$\text{div } \rho \mathbf{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

#### II-2 Conduction électrique dans un métal normal

Soumettons les extrémités d'un fil de métal normal à une différence de potentiel  $V$ . Le maintien de cette différence de potentiel établit un champ électrique permanent  $\mathbf{E}$  à l'intérieur du métal. En présence de ce champ, les électrons, porteurs des charges électriques élémentaires  $q = -e$  dont le nombre par unité de volume est  $n$ , sont soumis à une force électrique  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ . Sous l'effet de cette force, ils subissent une accélération définie par la loi fondamentale de la dynamique:  $\mathbf{F} = q\mathbf{E} = m \frac{d\langle \mathbf{v} \rangle}{dt}$ . Ils voient leur vitesse moyenne  $\langle \mathbf{v} \rangle$  croître selon la loi linéaire:  $\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{q}{m} \mathbf{E} t$ .

Aussi, en l'absence de toute autre force, la densité de courant  $\mathbf{j}$  liée à la vitesse  $\langle \mathbf{v} \rangle$  et à la densité de charges mobiles  $nq$  par la relation  $\mathbf{j} = nq \langle \mathbf{v} \rangle$  croît linéairement et indéfiniment, ce qui est manifestement contraire à l'expérience quotidienne.

S'il n'en est pas ainsi, c'est que, outre la force électrique, la charge  $q$  est soumise à une force de "frottement"  $\mathbf{f} = -a \langle \mathbf{v} \rangle$  qui, en première approximation, est proportionnelle à la vitesse moyenne de déplacement des charges.  $a$  est un coefficient de frottement. L'équation fondamentale de la dynamique s'écrit alors:

$$q\mathbf{E} - a \langle \mathbf{v} \rangle = m \frac{d\langle \mathbf{v} \rangle}{dt}$$

et la vitesse obéit à la relation:

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{q}{a} \mathbf{E} \left( 1 - \exp \left( -\frac{a}{m} t \right) \right)$$

où  $\tau = m/a$  est un temps caractéristique d'établissement d'un courant stationnaire.

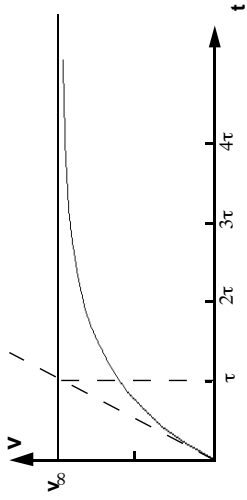


Figure 1 Evolution de la vitesse des électrons dans un conducteur parfait --- Dans un conducteur résistif

Aux temps courts la vitesse croît linéairement avec le temps selon  $\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{q}{m} \mathbf{E} t$  mais après près un temps  $t > \tau$  la vitesse atteint une vitesse limite  $\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{q}{a} \mathbf{E}$ . La densité de courant devient proportionnelle à  $\mathbf{E}$  suivant :  $\mathbf{j} = \frac{n q^2}{a} \mathbf{E}$ . Cette loi de proportionnalité entre la densité de courant et le champ électrique n'est autre que la loi d'Ohm  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ . Le coefficient de proportionnalité  $\sigma$  est la conductivité électrique du matériau.  $\rho = 1/\sigma$  en est sa résistivité.

Si l'on se souvient que l'intensité du courant  $I$  est définie par  $I = j S$  où  $S$  est la section du fil, et si on reprend la relation entre  $E = V / L$ , on vérifie facilement que la résistance  $R$  du fil, définie par  $V = RI$ , satisfait à la relation  $R = \rho L / S$

Dans le cuivre, à température ambiante où  $\rho = 1.7 \mu\Omega \cdot \text{cm}$  et  $n = 8.45 \cdot 10^{22} / \text{cm}^3$ , on trouve  $\tau = 2.5 \cdot 10^{-14}$  s. Ainsi la vitesse limite est atteinte au bout d'un temps extrêmement faible. A l'inverse, un courant continu disparaît quelque  $2.5 \cdot 10^{-14}$  s après la coupure du champ électrique, ce qui rend la période transitoire indétectable.

Les effets de  $\tau$  se feront sentir à très haute fréquence, si le champ électrique est porté par une onde électromagnétique de fréquence égale ou supérieure à  $10^{14}$  Hz.

### II-3 L'équation d'accélération

Le conducteur parfait correspondant à une résistivité nulle, il serait tentant de faire  $\sigma = 0$  dans équations précédentes. Cela cependant n'a pourtant pas beaucoup de sens et il faut reprendre les équations à leur origine en écrivant l'équation fondamentale de la dynamique avec une force de frottement nulle ( $a=0$ ) soit, en tenant compte de la relation  $\mathbf{j} = nq \langle \mathbf{v} \rangle$  :

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = nq \frac{d\langle \mathbf{v} \rangle}{dt} = \frac{n q^2}{m} \mathbf{E}$$

Elle vient se substituer à la traditionnelle relation  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ . Dans leur papier original, les frères London l'appelle "équation d'accélération".

C'est aussi ce que on appelle la première équation de London.

### II-4 Champ magnétique dans un conducteur parfait

Selon la 4<sup>ème</sup> équation de Maxwell, le champ magnétique  $\mathbf{B}$ , le champ électrique  $\mathbf{E}$  et la densité de courant  $\mathbf{j}$  sont liés par la relation:

$$\mathbf{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

En régime stationnaire ou avec une bonne approximation si  $\mathbf{E}$  varie suffisamment lentement avec le temps, cette équation se réduit à :

$$\mathbf{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

ce qui implique aussi:

$$\mathbf{rot} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}$$

Par ailleurs en prenant le rotationnel des deux membres de la première équation de London :

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = nq \frac{d\langle \mathbf{v} \rangle}{dt} = \frac{nq^2}{m} \mathbf{E}$$

et en tenant compte de la 1<sup>re</sup> équation de Maxwell:

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

on obtient une seconde relation entre les dérivées temporelles de  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{j}$ :

$$\mu_0 \mathbf{rot} \left( \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \right) = - \frac{1}{\lambda_L^2} \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)$$

dans laquelle intervient une longueur caractéristique  $\lambda_L$ .

$$\lambda_L^2 = \frac{m}{\mu_0 n q^2}$$

Finalement, en prenant les rotationnels des deux relations:

$$\mathbf{rot} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \mu_0 \mathbf{rot} \left( \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \right) = - \frac{1}{\lambda_L^2} \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)$$

en tenant compte de la relation d'analyse vectorielle classique:

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} = \mathbf{grad} \text{ div} - \Delta$$

et en introduisant la 2<sup>ème</sup> équations de Maxwell  $\text{div} \mathbf{B} = 0$  et de la relation de conservation des charges en régime stationnaire  $\text{div} \mathbf{j} = 0$

on obtient les relations:

$$\Delta \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = \frac{1}{\lambda_L^2} \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \quad \text{et} \quad \Delta \left( \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \right) = \frac{1}{\lambda_L^2} \left( \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \right)$$

Ces relations gouvernent l'évolution spatiale des dérivées temporelles du champ magnétique  $\mathbf{B}$  et de la densité de courant  $\mathbf{j}$ .

II-5 Application à une plaque de conducteur parfait

Considérons une plaque de conducteur parfait, latéralement infinie et d'épaisseur  $d$ . Cette plaque est parallèle au plan  $x0y$  et se trouve limitée par les surfaces placées aux cotes  $-d/2$  et  $+d/2$  de la direction  $0z$ .

A l'aide de courants  $\mathbf{j}^0$  situés sur des feuilles métalliques extérieures reliées à une batterie, un expérimentateur impose, dans l'espace entourant la plaque, un champ magnétique  $\mathbf{B}^0(t)$  dit champ des conducteurs. Celui-ci est orienté suivant  $0x$  et varie avec le temps.

Etant donné ce champ magnétique  $\mathbf{B}^0(t)$  imposé dans l'espace entourant la plaque, par l'expérimentateur, cherchons le champ magnétique  $\mathbf{B}(t)$  au sein de la plaque.

Puisque  $\mathbf{B}$  ne présente qu'une composante  $B_x(z)$  ne dépendant que de la variable  $z$ , il obéit au sein du matériau conducteur parfait à l'équation:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{\partial B_x(z)}{\partial t} \right) - \frac{1}{\lambda_L^2} \left( \frac{\partial B_x(z)}{\partial t} \right) = 0$$

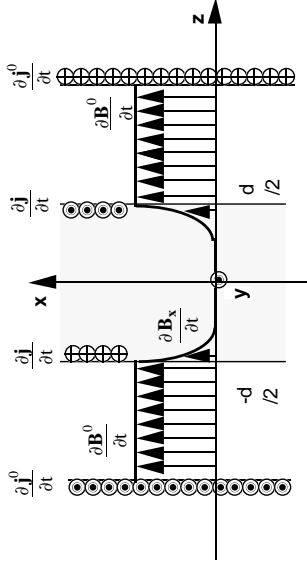


Figure 2 Répartition des courants et profil du champ dans une plaque conducteur parfait soumise à un champ magnétique  $\mathbf{B}^0(t)$

dont la solution est de toute évidence :

$$\frac{\partial B_x(z)}{\partial t} = \alpha \exp \left( \frac{z}{\lambda_L} \right) + \beta \exp \left( -\frac{z}{\lambda_L} \right)$$

$\alpha$  et  $\beta$  sont deux constantes d'intégration devant satisfaire aux conditions aux limites du champ magnétique dans la plaque conducteur parfait.

Les conditions aux limites résultent de la continuité du champ magnétique en l'absence de courants de surface, soit:

$$B_x(z=d/2) = B_x(z=d/2) = B^0$$

et donc aussi:

$$\frac{\partial B_x(z=-d/2)}{\partial t} = \frac{\partial B^0}{\partial t} = \frac{\partial B_x(z=+d/2)}{\partial t}$$

ce qui, à l'intérieur du conducteur parfait, conduit à:

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial B^0}{\partial t} \frac{\text{ch} \left( \frac{z}{\lambda_L} \right)}{\text{ch} \left( \frac{d}{2 \lambda_L} \right)}$$

dont le profil en  $z$  est représenté sur la figure 2.

La dérivée temporelle  $\frac{\partial B_x}{\partial t}$  décroît exponentiellement à partir de la surface de l'échantillon et tend vers 0 à l'intérieur de l'échantillon.

Il est facile de montrer que au voisinage des surfaces, la décroissance suit la loi exponentielle:

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial B^0}{\partial t} \exp \left( -\left( u / \lambda_L \right) \right)$$

où  $u = d/2 - x$  est la distance qui sépare le point  $x$  de la surface proche située à la cote  $+d/2$ . ( $u = x-d/2$  si le point considéré est proche de la seconde surface). La décroissance de  $\frac{\partial B_x}{\partial t}$  à partir des surfaces est très rapide puisque dans le cuivre,  $\lambda_L$  est proche de  $500 \text{ \AA}$ .

Cela signifie donc que, au-delà d'une épaisseur d'adaptation, une variation de champ extérieur  $\frac{\partial B^0}{\partial t}$  est sans effet sur le champ intérieur à l'échantillon conducteur parfait.

La raison de ce comportement tient en fait à l'apparition de courants volumiques  $\mathbf{j}$  intérieurs à la plaque de conducteur parfait et situés au voisinage de ses surfaces.

En effet le courant et le champ magnétique sont liés par la relation:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

et leurs dérivées temporelles par:

$$\text{rot} \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = \mu_0 \left( \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \right)$$

Ce qui signifie que toute inhomogénéité spatiale de  $\mathbf{B}$  offrant un rotationnel non nul est accompagnée d'une densité de courant  $\mathbf{j}$ .

Puisque  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  n'a qu'une composante suivant  $Ox$  qui varie selon la seule direction  $Oz$ ,  $\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}$

n'a qu'une composante suivant  $Oy$  qui varie elle aussi suivant  $Oz$ :

$$\frac{\partial j_y(z)}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial B_x}{\partial t} \right)$$

et donc:

$$\frac{\partial j_y(z)}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda_L} \frac{\partial B^0}{\partial t} \frac{\text{sh}\left(\frac{z}{\lambda_L}\right)}{\text{ch}\left(\frac{d}{2\lambda_L}\right)}$$

De même que  $\frac{\partial B_x(z)}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial j_y(z)}{\partial t}$  décroît exponentiellement à partir des surfaces et s'amortit sur une distance  $\lambda_L$ . Au voisinage de  $z = -\frac{d}{2}$ ,  $\frac{\partial j_y}{\partial t}$  est orienté selon  $-Oy$ , alors qu'il est orienté selon  $+Oy$  au voisinage de  $z = +\frac{d}{2}$ .

On se trouve donc en présence de deux types de courants:

- les courants  $j^0$  imposés par l'expérimentateur et circulant sur les feuilles conductrices
- les courants volumiques  $\mathbf{j}$  qui se développent " par influence " au voisinage de la surface du conducteur parfait.

En raison du principe de superposition, le champ magnétique total est la somme des champs magnétiques créés par chacun des courants.

Les courants  $j^0$  créent un champ magnétique entre les deux feuilles conductrices (vide et plaque conducteur parfait)

Les courants  $\mathbf{j}$  créent un champ magnétique uniquement à l'intérieur de la plaque conducteur parfait.

Le processus est donc le suivant:

- une augmentation de  $j^0$  provoque entre les feuilles conductrices, plaque conducteur parfait comprise, une augmentation de  $B^0$ .
- à l'augmentation de  $B^0$  la plaque conducteur parfait répond par l'augmentation d'un courant  $\mathbf{j}$ , localisé au voisinage de la surface de ses surfaces.
- ce courant  $\mathbf{j}$  crée dans la plaque un nouveau champ magnétique  $B^a$ . Vu l'expression de  $\mathbf{j}$  et sa répartition spatiale, l'augmentation de ce champ  $B^a$ :
  - est égale et opposée à l'augmentation de  $B^0$  au centre de la plaque
  - tend vers 0 au voisinage de la surface.

- par superposition des deux champs, la variation totale de champ magnétique reste nulle au cœur du conducteur parfait avec une épaisseur d'adaptation  $\lambda_L$ .

Ainsi les courants  $\mathbf{j}$  sont des courants induits dont les effets (le champ  $B^a$ ) s'opposent à la cause qui leur donne naissance (le champ  $B^0$ ).

Tout ce que nous venons de décrire est un phénomène d'induction qui empêche la variation du champ magnétique à l'intérieur de la plaque.

Ce mécanisme d'induction se rencontre dans tous les métaux. Cependant le courant induit dans un métal normal s'amortit sous l'effet de la résistivité électrique en un temps de l'ordre de  $10^{-14}$  s, temps au-delà duquel il laisse pénétrer le champ magnétique.

Si le champ magnétique présente une fréquence supérieure à  $1/\tau$ , le champ magnétique ne peut pénétrer dans l'échantillon. Ce phénomène est connu sous le nom d'effet de peau.

#### IV Les équations de London

##### IV-1 Comportement du conducteur parfait

Ainsi, un conducteur parfait s'oppose à toute **variation** de champ magnétique en son sein. Si à l'instant initial, le champ magnétique  $y$  est nul, il le restera, quelles que soient les variations de champ extérieur provoquées par des courants  $j^0$  (à l'épaisseur  $\lambda_L$  près qui sert de zone d'adaptation)

Considérons un métal présentant deux états séparés par une température  $T_{cp}$ .

-au-dessus d'une température  $T_{cp}$ , le métal est normal (résistif).

-en dessous de  $T_{cp}$ , il est conducteur parfait.

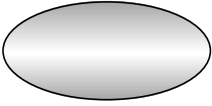
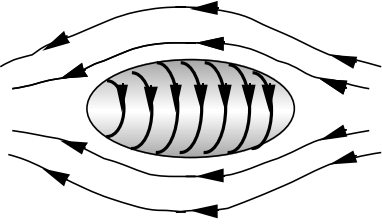
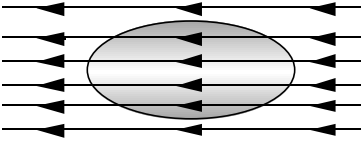
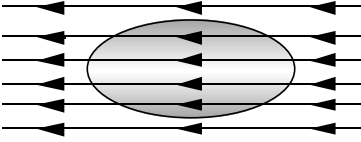
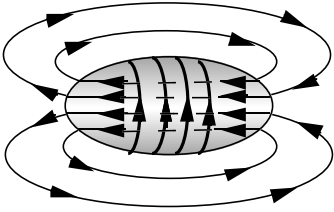
Un tel métal imaginaire rappelle le supraconducteur dont les états normaux et supraconducteur sont séparés par la température  $T_c$  critique.

Suivons ses évolutions à la figure 4.

##### *refroidissement en champ nul*

Abaissons la température de l'échantillon en champ nul et établissons le champ magnétique  $B^0$  à une température inférieure à  $T_{cp}$ .

Lors de l'établissement de  $B^0$  dans le matériau à l'état de conducteur parfait, un courant induit apparaît et le champ magnétique ne peut pénétrer dans l'échantillon.

<p><b>Figure 4</b> Comportement d'un conducteur parfait</p>		
	<p>L'échantillon est amené en champ nul à une température <math>T &lt; T_{cp}</math></p>	<p>Le champ est appliqué sous <math>T_{cp}</math>. Des courants sont induits par la variation de <math>B^0</math>. Ils ne s'amortissent pas et font écran à la pénétration du champ dans l'échantillon.</p>
		
<p>Sous champ magnétique, l'échantillon est ramené à une température supérieure à <math>T_{cp}</math>. La résistivité réapparaît, les courants s'amortissent et le champ pénètre dans l'échantillon</p>	<p>L'échantillon est refroidi sous champ constant. En l'absence de variation de champ, aucun courant n'est induit.</p>	<p>A basse température, le champ extérieur est coupé. Cette variation de champ engendre des courants qui ne s'amortissent pas et piègent le champ magnétique.</p>

**réchauffement de l'échantillon**

Le réchauffement de l'échantillon au dessus de  $T_{cp}$  le rend résistif. Les courants s'amortissent et le champ magnétique pénètre dans l'échantillon.

**refroidissement sous champ**

Abaissons maintenant la température du matériau en dessous de  $T_{cp}$  tout en maintenant le champ magnétique établi précédemment.

En l'absence de variation de champ extérieur, aucun courant ne se trouve induit et le champ magnétique  $B^0$  est maintenu dans l'échantillon, bien que l'échantillon soit dans l'état conducteur parfait.

**coupure du champ à basse température et flux piégé**

Coupons le champ  $B^0$  à basse température. Cette variation négative du champ extérieur à une température inférieure à  $T_{cp}$  induit des courants s'opposant à toute variation du champ à l'intérieur de l'échantillon.

Après suppression du champ extérieur, un courant induit demeure et avec lui un champ magnétique piégé.

**IV-2 Comportement du supraconducteur.**

Dans un conducteur parfait, il n'est pas équivalent d'abaisser la température sous  $T_{cp}$  puis d'appliquer le champ ou d'appliquer le champ à haute température puis de refroidir sous champ.

L'état d'un conducteur parfait dépend de son histoire thermomagnétique.

Des expériences identiques réalisées sur un supraconducteur montrent (figure 5) que son état magnétique ne dépend pas de son histoire:

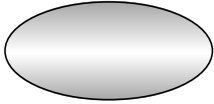
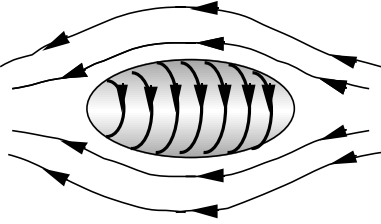
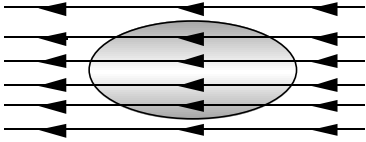
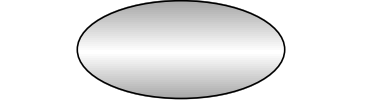
Il n'est qu'une règle:

le champ magnétique  $B$  à l'intérieur d'un supraconducteur est toujours nul, quelle que soit son histoire thermique.

Un piégeage de flux n'est jamais observé dans un supraconducteur massif.

Le supraconducteur n'est pas simplement un conducteur parfait et l'effet Meissner n'est pas un simple phénomène d'induction.

L'état supraconducteur est un état thermodynamique.

<p>Figure 5</p> <p>Comportement d'un supraconducteur</p>		
	<p>L'échantillon est amené en champ nul à une température <math>T &lt; T_{cp}</math></p>	<p>Le champ est appliqué sous <math>T_{cp}</math>. Des courants se développent et font écran à la pénétration du champ dans l'échantillon.</p>
	<p>L'échantillon est refroidi sous champ constant. La supraconductivité réapparaît et avec elle les courants faisant écran à la pénétration du champ magnétique</p>	
<p>Sous champ magnétique, l'échantillon est remonté à une température supérieure à <math>T_{cp}</math>. La supraconductivité disparaît et le champ pénètre dans l'échantillon</p>	<p>A basse température, le champ extérieur est coupé. Les courants supraconducteurs disparaissent aussi afin de laisser nul le champ à l'intérieur de l'échantillon.</p>	

#### IV-3 Première équation de London

S'il manque manifestement un ingrédient pour rendre compte de l'effet Meissner, tous les éléments ne sont pas à remettre en cause. Il faut conserver:

- Les équations de Maxwell: leur application est générale et elles sont fortement validées par la relativité.
- la relation de conservation.
- L'équation d'accélération qui est une application du principe fondamental de la dynamique à des charges libres (on fait l'hypothèse que le courant supraconducteur est porté par de telles charges).

Cette équation transposée aux supraconducteurs est appelée première équation de London.

$$\frac{dj}{dt} = \frac{n q^2}{m} \mathbf{E}$$

#### IV-4 Deuxième équation de London

Le paragraphe précédent a montré que l'application des équations de Maxwell et de la première équation de London étaient insuffisantes pour rendre compte de l'exclusion du champ magnétique dans les supraconducteurs, indépendamment de l'histoire de l'échantillon. Il faut pour expliquer ce phénomène ajouter quelque chose de nouveau.

En l'absence de théorie, on peut toujours essayer une équation. Si elle rend compte des expériences, elle contient vraisemblablement une part de vérité. Il restera à la justifier.

Une telle équation, avancée sans support microscopique ou théorique, est appelée équation phénoménologique.

L'application des équations de Maxwell a montré que la dérivée temporelle  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  était nulle dans le conducteur parfait. La nouvelle théorie doit être telle que  $\mathbf{B}$  lui-même soit nul.

Que faire ?

Eh bien remplaçons simplement dans les équations du paragraphe précédent les dérivées de  $\mathbf{B}$  et de  $\mathbf{j}$  par ces quantités elles-mêmes.

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \longrightarrow \mathbf{B} \quad \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \longrightarrow \mathbf{j}$$

L'équation d'induction:

$$\mu_0 \text{rot} \left( \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \right) = - \frac{1}{\lambda_L^2} \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)$$

devient:

$$\mu_0 \text{rot} \mathbf{j} = - \frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{B}$$

C'est la deuxième équation de London.

Les équations en  $\mathbf{B}$  et en  $\mathbf{j}$  se déduisent à leur tour en devenant simplement:

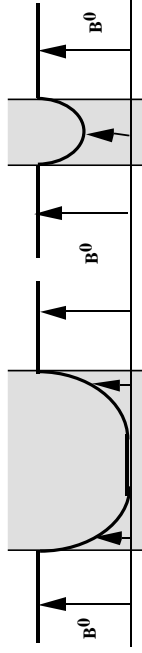
$$\Delta \mathbf{B} - \frac{\mathbf{B}}{\lambda_L^2} = 0 \quad \text{et} \quad \Delta \mathbf{j} - \frac{\mathbf{j}}{\lambda_L^2} = 0$$

#### IV-4 Plaque mince supraconductrice

Dans la plaque supraconductrice mince, et par simple transposition des résultats précédents, les champs magnétiques et les courants s'écrivent maintenant:

$$j_y(z) = \frac{-B^0}{\mu_0 \lambda_L} \frac{\text{sh} \left( \frac{z}{\lambda_L} \right)}{\text{ch} \left( \frac{d}{2 \lambda_L} \right)} \quad \text{et} \quad B_x = B^0 \frac{\text{ch} \left( \frac{z}{\lambda_L} \right)}{\text{ch} \left( \frac{d}{2 \lambda_L} \right)}$$

avec des profils tels que ceux représentés ci-dessous dans des plaques épaisses et dans des plaques minces:



Plaque épaisse

Plaque mince

Figure 6: Profils des champs magnétiques dans des plaques supraconductrices épaisses et minces soumises à un champ magnétique extérieur  $B^0$ .

#### Plaque épaisse

Si la plaque est épaisse, le courant et le champ magnétique sont localisés sur l'épaisseur de London au voisinage des surfaces situées aux cotes  $-d/2$  et  $d/2$ . En posant  $u = z + d/2$ , on obtient au voisinage de la surface en  $z = -d/2$ :

$$B = B^0 \exp \left( -u / \lambda_L \right) \quad j = \frac{B^0}{\mu_0 \lambda_L} \exp \left( -u / \lambda_L \right)$$

#### Plaque mince

Dans une plaque mince, c'est à dire d'épaisseur inférieure à l'épaisseur de London  $\lambda_L$ , le profil du champ est celui de la figure b. Il n'atteint pas une valeur nulle au centre de la plaque.

#### IV-4 Profondeur de pénétration de London

La longueur caractéristique de pénétration du champ magnétique  $\lambda_L$  est appelée épaisseur de London.

$$\lambda_L^2 = \frac{m}{\mu_0 n q^2}$$

Le seul paramètre intervenant est  $n$  la densité d'électrons supraconducteurs.

La détermination de cette grandeur a fait l'objet de nombreux travaux.

Comme on le verra plus loin, l'aimantation  $\mathbf{M}$  d'un échantillon sous forme de plaque mince est égale à :

$$\mathbf{M} = \frac{V}{\mu_0} \left[ \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{+d/2} \mathbf{B}(z) dz - \mathbf{B}^0 \right]$$

c'est-à-dire au produit du volume de l'échantillon par la différence entre la valeur moyenne du champ magnétique dans l'échantillon et le champ  $\mathbf{B}^0$ , soit pour une plaque très mince:

$$\mathbf{M} = - \mathbf{B}^0 \frac{V}{\mu_0} \left[ 1 - \frac{2 \lambda_L}{d} \text{th} \left( \frac{d}{2 \lambda_L} \right) \right]$$

La mesure avec un magnétomètre de l'aimantation  $\mathbf{M}$  de plaques minces de différentes épaisseurs permet de déterminer  $\lambda_L$ . La mesure est particulièrement sensible pour les très petites épaisseurs de plaque puisque:

$$\mathbf{M} = - \mathbf{B}^0 \frac{V}{\mu_0} \left( \frac{d^2}{2 \lambda_L^2} \right) \quad \text{pour } d \ll \lambda_L$$

$$\mathbf{M} = - \mathbf{B}^0 \frac{V}{\mu_0} \left( 1 - \frac{d}{\lambda_L} \right) \quad \text{pour } d \gg \lambda_L$$

Les mesures d'aimantation des petits échantillons montrent que cette longueur de pénétration du champ magnétique est une réalité physique.

Quelques résultats de mesures sont données au tableau ci dessous. (GEN-p.24, BUR-p.11, LYN-p.48- voir discussion TIN-p.87)

élément	Al	Sn	Pb	Cd	Nb
$\lambda_L$ théorique (Å)	100	340	370	1100	390
$\lambda$ mesuré (Å) extrapolées à 0K	500	510	390	1300	440

Mais pour des raisons importantes sur lesquelles nous reviendrons, les valeurs mesurées sont systématiquement supérieures aux valeurs attendues.

De façon générale, on réserve la notation  $\lambda_L$  pour la grandeur  $\frac{m}{\mu_0 n q^2}$  et  $\lambda$  pour l'épaisseur effective de London.

Comme on peut le lire dans [TIN-p.87] les mesures d'épaisseur de London sont délicates.

On trouve des mesures par la méthode des films minces ou par des méthodes inductives [GEN-p. 22]

#### IV-5 Dépendance thermique de la profondeur de pénétration de London

Nous ne pouvons quitter fusse provisoirement la discussion sur la longueur de London sans signaler sa forte dépendance thermique, essentiellement au voisinage de la température critique  $T_c$ .

$\lambda$  croit en effet très fortement lorsque on se rapproche de  $T_c$  avec une loi en champ moyen du type:

$$\lambda(T) = \lambda(0) \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^4 \right]^{-1/2}$$

Des grandeurs impliquées dans la définition de  $\lambda_L$ , seule  $n$  la densité de charges supraconductrice paraît de nature à varier avec la température.

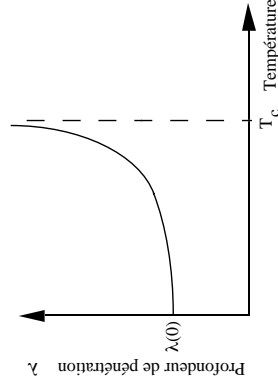


Figure 2

Evolution thermique de la profondeur de pénétration du champ magnétique

La dépendance thermique de  $\lambda$  montrerait que  $n$  décroît au voisinage de  $T_c$  et tend vers 0 à la température critique.

#### IV-6 Supraconducteur avec trou (non simplement connexe)

On considère maintenant un supraconducteur troué, non simplement connexe.

Un corps est connexe si quelques soient 2 de ses points A et B, il est toujours possible d'établir un chemin allant de A à B sans quitter le corps.

Un corps est simplement connexe s'il n'existe pas de trous qui débouchent en deux points de sa surface. (une boule avec un trou au milieu est simplement connexe. Un tore ne l'est pas)

Mieux dit: dans un corps simplement connexe, tout lacet est homotope à un point, ce qui signifie que tout lacet déformé de proche en proche peut être ramené à un point.

Un disque est typiquement un corps non simplement connexe.

Effectuons 2 types de refroidissements: l'un sous champ, l'autre en champ nul.

#### Refroidissement en champ nul

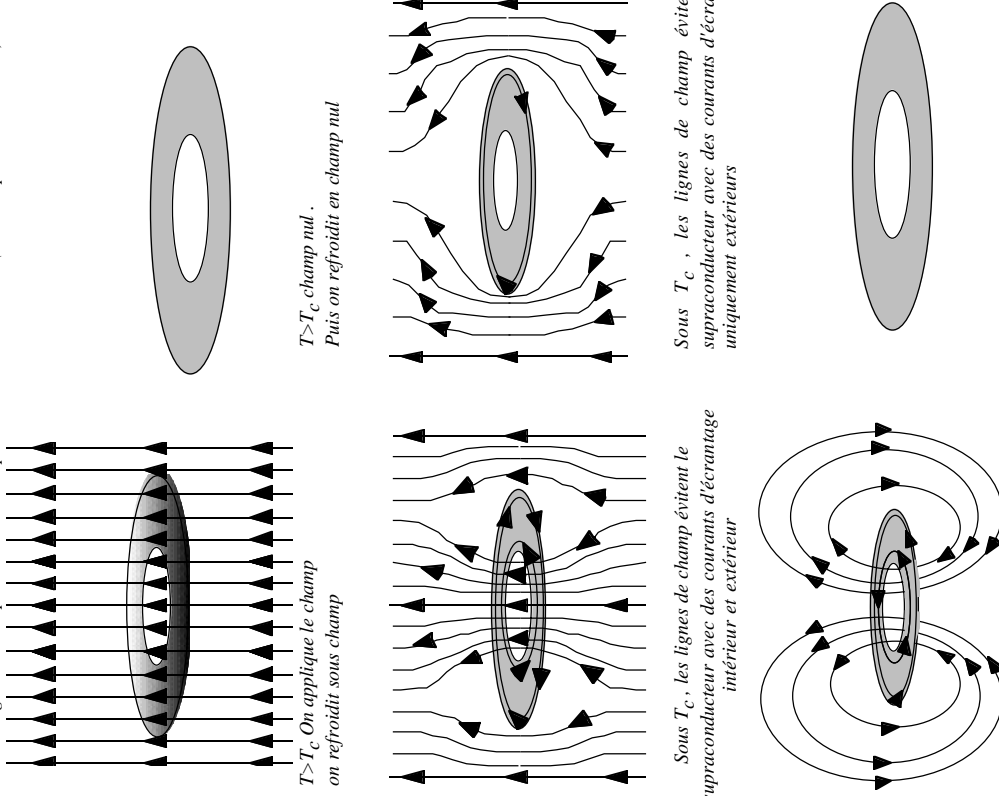
- l'échantillon est refroidi en champ nul.
- A  $T < T_c$  un champ magnétique est appliqué. Des courants supraconducteurs se développent pour empêcher le champ magnétique de pénétrer dans le supraconducteur. Pour cela les courants s'installent sur le pourtour extérieur et protègent à la fois la matière et le trou.
- A basse température, le champ extérieur est coupé et les courants s'estompent.

#### Refroidissement sous champ

- Le champ  $B^0$  est appliqué à  $T > T_c$ . Le champ traverse le supraconducteur (dans son état normal) et bien sûr il traverse aussi le trou.
- La température de l'échantillon est abaissée à  $T < T_c$ . Le supraconducteur repousse les lignes de champ intérieures et extérieures en développant des courants d'écrantage sur les pourtours intérieur et extérieur du disque.
- Le champ magnétique est coupé à basse température. Le champ magnétique extérieur se retire, mais le champ magnétique intérieur ne peut le faire sans traverser le disque, ce qui est contraire à notre principe.

Les courants du pourtour intérieur font "bonne garde" et poursuivent leur travail d'écrantage. Un flux est piégé et de nouveaux courants se développent sur le pourtour extérieur pour repousser le bouclage des lignes de champ hors de l'échantillon.

Figure 8: Comportement d'un supraconducteur avec trou ( non simplement connexe)



Sous  $T_c$ , on coupe le champ. Le courant d'écrantage intérieur est maintenu et le flux intérieur est piégé.

Sous  $T_c$ , on coupe le champ. le courant d'écrantage extérieur disparaît

## V La jauge de London

### V-1 Notion de jauge

En électromagnétisme, les champs physiques sont ceux qui donnent naissance aux forces. Ce sont le champ électrique  $\mathbf{E}$  et le champ magnétique  $\mathbf{B}$  qui produisent sur une charge  $q$  se déplaçant à la vitesse  $\mathbf{v}$  une force  $\mathbf{f} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$ . Ces champs dérivent du potentiel scalaire  $V$  et du potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  par les relations:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$$

En fait le champ électromagnétique  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  étant donné, le couple de potentiel  $(V, \mathbf{A})$  n'est pas unique. Le même champ électromagnétique  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  peut être déduit suivant les mêmes relations du couple  $(V', \mathbf{A}')$  lié au précédent par la transformation:

$$V' = V - \frac{\partial \chi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } \chi(\mathbf{r}, t)$$

où  $\chi(\mathbf{r}, t)$  est une fonction scalaire de l'espace et du temps.

Une telle opération s'appelle une transformation de jauge et le choix du couple  $(V, \mathbf{A})$  s'appelle un choix de jauge.

Une transformation de jauge ne modifie pas les quantités physiques mesurables, telles que les champs  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ , les positions ou les vitesses des particules. Elle peut par contre modifier sans dommage les grandeurs non physiques, c'est-à-dire non mesurables directement telles que les potentiels  $\mathbf{A}$  et  $V$ , la phase de la fonction d'onde en mécanique quantique ou l'impulsion  $\mathbf{p}$  lorsqu'elle diffère de la simple quantité de mouvement  $m\mathbf{v}$  (voir annexe de mécanique Lagrangienne).

Quelle jauge choisir? Eh bien cela dépend des cas...

On choisira pour chaque problème la jauge la plus pratique, celle qui conduit aux équations les plus simples, et à l'analyse la plus directe.

En magnétostatique, on choisit généralement la jauge de Coulomb qui fixe le couple  $(V, \mathbf{A})$  par la relation  $\text{div } \mathbf{A} = 0$ .

En électromagnétisme, on retient la jauge de Lorentz:  $\text{div } \mathbf{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0$  dont

l'intérêt est de symétriser les équations des ondes des potentiels  $\mathbf{A}$  et  $V$ .

### V-2 Jauge de London

Ici nous choisissons la jauge de London dont nous présentons maintenant le bien fondé.

Pour cela, remplaçons  $\mathbf{B}$  par  $\text{rot } \mathbf{A}$  dans la deuxième relation de London. Il vient:

$$\text{rot} \left( \mathbf{j} + \frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \mathbf{A} \right) = 0$$

soit, puisque le rotationnel d'un gradient est nul:

$$\mathbf{j} + \frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \mathbf{A} = \text{grad } \chi(\mathbf{r}, t) \quad \text{ou} \quad \mathbf{j} = \frac{nq}{m} (\text{grad } \chi(\mathbf{r}, t) - q \mathbf{A})$$

où  $\chi(\mathbf{r}, t)$  est une fonction scalaire quelconque, dépendant de l'espace et du temps, apparaissant finalement ici comme une constante d'intégration.

Il est évident que  $\mathbf{j}$  est une grandeur mesurable. C'est une grandeur physique invariante par un changement de jauge.

Il s'ensuit que la constante d'intégration  $\text{grad} \chi(\mathbf{r}, t)$  et le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  ne peuvent pas être indépendants: choisir l'un, c'est imposer l'autre.

Voyons maintenant les contraintes physiques imposées à la densité de courant  $\mathbf{j}$ :

Tout d'abord en régime stationnaire, il n'y a accumulation de charge en aucun point du supraconducteur. Cela se traduit par la relation de conservation stationnaire:

$$\text{div } \mathbf{j} = 0.$$

Ensuite, le courant ne peut pas sortir du supraconducteur. Cela impose que la composante de la densité de courant  $\mathbf{j}$  sur la normale à la surface extérieure soient nulles:

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} |_{\text{surface}} = 0$$

Le choix de jauge est lui arbitraire. Nous choisissons d'imposer à  $\mathbf{A}$  les contraintes de  $\mathbf{j}$ :

$$\text{div } \mathbf{A} = 0 \quad \text{en volume}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} |_{\text{surface}} = 0$$

Les relations précédentes et l'application de la divergence de la divergence aux deux membres de l'équation:

$$\mathbf{j} = \frac{nq}{m} (\text{grad } \chi(\mathbf{r}, t) - q \mathbf{A})$$

conduit compte tenu de la relation d'analyse vectorielle  $\text{div grad } \chi = \Delta \chi$

$$\Delta \chi = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{n} \cdot \text{grad } \chi = 0$$

### V-3 Relation entre $\mathbf{j}$ et $\mathbf{A}$ en jauge de London

La relation  $\Delta \chi = 0$  associée à la continuité de  $\chi$  fait de cette fonction une fonction harmonique.

Or une fonction harmonique, définie sur un volume simplement connexe (sans trou qui ne débouche en deux endroits distincts de la surface) et dont la composante du gradient sur la normale à la surface est nul, est constante dans tout le volume.

Pour cela considérons le vecteur  $\mathbf{U} = \chi \text{grad } \chi$  ( ou  $\square \chi$  est une fonction de  $\mathbf{r}$  )  
Comme tout vecteur, il obéit à la relation:

$$\oiint \mathbf{U} \cdot d\mathbf{S} = \iiint \text{div } \mathbf{U} \, d\tau$$

( intégrations sur la surface fermée et le volume délimité par cette surface)

or:

$$\text{div } [\chi \text{grad } \chi] = \chi \text{div } [\text{grad } \chi] + \text{grad } \chi \cdot \text{grad } \chi$$

soit:

$$\oiint [\chi \text{grad } \chi] \cdot d\mathbf{S} = \iiint \text{div } [\chi \text{grad } \chi] \, d\tau = \iiint \chi \text{div } [\text{grad } \chi] \, d\tau + \iiint [\text{grad } \chi]^2 \, d\tau$$

puisque  $d\mathbf{S}$  est orienté dans le sens de la normale sortante:

$$\oiint [\chi \text{grad } \chi] \cdot d\mathbf{S} = \oiint \chi [\text{grad } \chi \cdot \mathbf{n}] \, dS = 0$$

Puisque  $\Delta \chi = 0$ :

$$\iiint \chi \text{div } [\text{grad } \chi] \, d\tau = \iiint \chi \Delta \chi \, d\tau = 0$$

et donc:

$$\iiint [\text{grad } \chi]^2 \, d\tau = 0$$

ce qui impose ( intégrale d'une fonction toujours positive = 0)

$$\text{grad } \chi = 0 \quad \text{et} \quad \chi = \text{constante}$$

En revenant à :

$$\mathbf{j} = \frac{nq}{m} (\text{grad } \chi(\mathbf{r}, t) - q \mathbf{A})$$

on obtient dans un supraconducteur simplement connexe:

$$\mathbf{j} = - \frac{nq^2}{m} \mathbf{A}$$

$$\text{avec :} \quad \text{div } \mathbf{A} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} = 0$$

En jauge de London, le potentiel vecteur obéit à la même équation que  $\mathbf{j}$  et  $\mathbf{B}$  soit:

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{\mathbf{A}}{\lambda_L^2} = 0$$

### V-4 Impulsion $\mathbf{p}$ en jauge de London

Comme montré dans l'annexe consacrée à la mécanique Lagrangienne, l'impulsion d'une particule chargée, plongée dans un champ magnétique, se distingue de la quantité de mouvement  $m\mathbf{v}$  par:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} + q\mathbf{A}$$

L'impulsion n'est pas une quantité physique et n'est pas invariante par changement de jauge.

En remplaçant  $\mathbf{v}$  par  $\frac{nq}{n} \frac{\mathbf{v}}{q} = \frac{\mathbf{j}}{nq}$ , il vient:

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{j}}{nq} + q\mathbf{A}$$

ce qui en jauge de London, vu la relation entre  $\mathbf{j}$  et  $\mathbf{A}$  vaut 0.

La jauge de London dans un supraconducteur simplement connexe est celle dans laquelle l'impulsion  $\mathbf{p}=0$ .

V-5 Corps non simplement connexe

Si un corps n'est pas simplement connexe et présente un trou qui débouche en deux endroits différents de la surface, il existe des lacets contenus dans le supraconducteur qui entourent le trou. Si on resserre continûment ces lacets, ils ne peuvent se réduire à un point et dans le langage des fonctions holomorphes, ils ne sont pas homotopes à un point.

Dans une telle situation, les relations  $\text{div } \mathbf{A} = 0$  et  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} = 0$  s'avèrent à elles seules insuffisantes pour définir une jauge. Il faut ajouter une relation donnant la circulation de  $\mathbf{A}$  sur tout circuit fermé entourant le trou (MAR-p.47)

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \phi$$

On reviendra très largement sur ce point dans le chapitre consacré aux effets de cohérence.

VI Fil supraconducteur placé dans un champ extérieur

VI-1 Les fonctions de Bessel

On appelle équation différentielle de Bessel:  
 $x^2 y'' + x y' - (x^2 - n^2) y = 0$   
 Equation différentielle de Bessel modifiée:  
 $x^2 y'' + x y' - (x^2 + n^2) y = 0$

Leurs solutions sont données dans tous les formulaires de mathématiques (voir par exemple Schaum SCH-p.136)

Solution de l'équation de Bessel  
 $y(x) = \alpha J_n(x) + \beta Y_n(x)$  (J fonction de Bessel, Y fonction de Neumann)

Solution de l'équation de Bessel modifiée

$$y(x) = \alpha I_n(x) + \beta K_n(x) \quad (I \text{ et } K \text{ fonction de Bessel modifiées})$$

Les premières fonctions de Bessel modifiées (n=0 et n=1) qui nous intéresseront particulièrement ont été tracées à la figure 9 avec le logiciel mathematica dont elles sont résidentes.

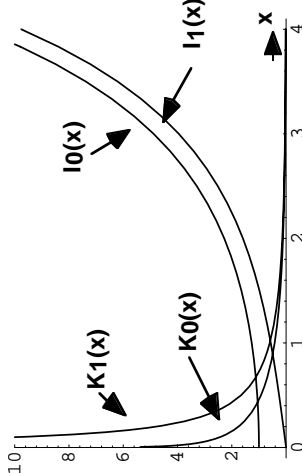


Figure 9:  
 Fonctions de Bessel modifiées d'ordre 0 et 1.

Mathematica :  
 Plot[{BesselK[0,x],BesselK[1,x],  
 BesselI[0,x],BesselI[1,x]}, {x,0,4}]

Elles obéissent à toute une série de relations parmi lesquelles:

$$I_0'(x) = I_1(x) \quad K_0'(x) = -K_1(x)$$

$$\int_0^x u I_0(u) du = x I_1(x) \quad \int_0^x u K_0(u) du = x K_1(x)$$

$$\int_0^x I_1(u) du = I_0(x) \quad \int_0^x K_1(u) du = -K_0(x)$$

$$\int_0^\infty x K_0(x) dx = 1$$

Et présentent les comportements asymptotiques (x->∞):

$$I_n(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \quad K_n(x) \approx \frac{e^{-x}}{\sqrt{2\pi x}}$$

Les fonctions de Bessel modifiées constituent des généralisations des fonction exponentielles réelles croissantes et décroissantes  $e^x$  et  $e^{-x}$ .

Les fonctions de Bessel et les fonctions de Neumann sont pour leur part des généralisations des fonctions sinus et cosinus (exponentielles complexes  $e^{ix}$  et  $e^{-ix}$ ) et sont oscillantes.

VI-2 Cylindre supraconducteur placé dans un champ magnétique

Le comportement du fil supraconducteur placé dans un champ magnétique extérieur  $\mathbf{B}_0$  dirigé suivant son axe et créé par des courants extérieurs  $\mathbf{j}^0$  n'est pas fondamentalement

différent de celui de la plaque. Il mérite néanmoins d'être traité en détail car le fil supraconducteur est l'élément le plus utilisé dans les applications.

Dans le fil supraconducteur, le champ magnétique obéit à

$$\Delta(\mathbf{B}) = \frac{1}{\lambda_L^2}(\mathbf{B})$$

Et en symétrie cylindrique, le Laplacien s'écrit:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Pour des raisons évidentes de symétrie,  $\mathbf{B}$  ne dépend que de  $r$ . Examinons les composantes de  $\mathbf{B}$  dans le repère cylindrique d'axe  $Oz$ .

$B_\theta = 0$  puisqu'il n'y a aucune raison de privilégier un sens de rotation autour de  $Oz$  plutôt que l'autre.

$B_r = 0$  à l'extérieur du cylindre puisque le champ créé par le grand solénoïde externe est dirigé suivant  $Oz$ . Par continuité de la composante normale du champ magnétique,  $B_r$  est nul à l'intérieur du supraconducteur au voisinage immédiat de la surface. La relation  $\text{div} \mathbf{B} = 0$  étend la relation  $B_r = 0$  à l'intérieur de tout le cylindre.

En coordonnées cylindriques, la seule composante de  $\mathbf{B}$  est suivant  $z$  et elle ne dépend que de  $r$ :  $B_z(r)$ .

L'équation de  $\mathbf{B}$  se réduit donc à l'intérieur du cylindre à:

$$\frac{\partial^2 B_z(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_z(r)}{\partial r} - \frac{1}{\lambda_L^2} B_z(r) = 0$$

En effectuant le changement de variable  $\rho = r/\lambda_L$ , elle se ramène à:

$$\rho^2 \frac{\partial^2 B_z(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial B_z(\rho)}{\partial \rho} - \rho^2 B_z(\rho) = 0$$

qui est l'équation de Bessel modifiée pour  $n=0$

$$B_z(\rho) = \alpha I_0(\rho) + \beta K_0(\rho)$$

où  $I_0$  et  $K_0$  sont les fonctions de Bessel modifiées d'ordre 0

Puisque  $K_0(\rho)$  diverge en  $\rho=0$  (axe du cylindre), on va éliminer cette composante et faire  $\beta=0$  (En fait dans un milieu infini, c'est cette solution que on gardera pour les vortex)

Avec la condition de continuité de la composante tangentielle de  $\mathbf{B}$  en l'absence de courants surfaciques, on a  $B_z(R) = B_0$  et l'unique composante non nulle de  $\mathbf{B}$  s'écrit:

$$B_z(r) = B_0 \frac{I_0(r/\lambda_L)}{I_0(R/\lambda_L)}$$

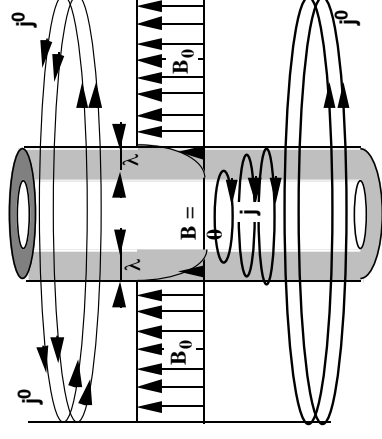


Figure: I0

répartition des courants et des champs dans le système composé d'un fil supraconducteur placé dans un solénoïde infini

pour  $r$  et  $R \gg \lambda_L$  et en mettant en évidence  $u = R-r$  qui est la distance de pénétration dans le supraconducteur depuis sa surface extérieure:

$$B_z(r) = B_0 \frac{\exp\left(\frac{R-r}{\lambda_L}\right)}{\sqrt{\frac{r}{R}}} \approx B_0 \exp\left(-\frac{u}{\lambda_L}\right)$$

On retrouve une décroissance exponentielle du champ magnétique à l'intérieur du fil depuis sa valeur  $B_0$  à la surface. Il tend exponentiellement vers 0 avec la longueur caractéristique  $\lambda_L$ .

De nouveau, la décroissance exponentielle du champ magnétique dans l'échantillon est due à des courants d'écrantage reliés à  $\mathbf{B}$  par  $\text{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ .

En coordonnées cylindriques,  $\mathbf{B}$  n'ayant qu'une composante suivant  $z$  qui ne dépend que de  $r$ , son rotationnel n'a qu'une composante suivant  $\theta$  qui ne dépend elle aussi que de  $r$ .

$$[\text{rot} \mathbf{B}_z(r)]_\theta(r) = -\frac{\partial B_z(r)}{\partial r}$$

soit en tenant compte de la relation  $I_0'(x) = I_1(x)$ :

$$j_\theta(r) = -\frac{B_0}{\mu_0 \lambda_L} \frac{I_1(r/\lambda_L)}{I_0(R/\lambda_L)}$$

C'est un courant qui circule au voisinage de la surface externe du supraconducteur sur une épaisseur de l'ordre de  $\lambda_L$  en décroissant à partir de la surface selon:

$$j_\theta(r) = -\frac{B_0}{\mu_0 \lambda_L} \exp\left(-\frac{u}{\lambda_L}\right)$$

où  $u$  est la distance par rapport à la surface extérieure en pénétrant dans le supraconducteur.

Les courants  $\mathbf{j}$  tournent dans un sens opposé à  $\mathbf{j}^0$ .

$\mathbf{j}^0$  crée un champ  $\mathbf{B}_0$  uniforme dans le grand solénoïde, matériau supraconducteur compris.

$\mathbf{j}$  crée un champ qui s'oppose à  $\mathbf{B}_0$  et vient l'annihiler au sein du supraconducteur.  $\lambda_L$  est la distance sur laquelle  $\mathbf{j}$  circule et qui se trouve nécessaire pour écranter complètement  $\mathbf{B}_0$ .

**VII - Transport de courant dans un fil supraconducteur**

Abordons maintenant le cas d'un même fil supraconducteur de rayon  $R$  dans lequel cette fois, l'expérimentateur impose un courant  $I$ . Le fil est placé dans un circuit comprenant un générateur de force électromotrice  $E$ , un fil résistif de résistance  $R$  et le fil supraconducteur de résistance nulle. Le courant imposé est manifestement  $I = E/R$ .

Le fil est le siège d'une densité de courant  $\mathbf{j}$  qui, par symétrie de rotation, ne peut dépendre que de  $r$  et dont la seule composante est manifestement selon l'axe  $Oz$ . Il obéit à l'équation:

$$\Delta \mathbf{j} - \frac{\mathbf{j}}{\lambda_L^2} = 0$$

qui se réduit en symétrie cylindrique que compte tenu des composantes nulles à:

$$\frac{\partial^2 j_z(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial j_z(r)}{\partial r} - \frac{j_z(r)}{\lambda_L^2} = 0$$

Cette équation est strictement similaire à celle de  $B_z(r)$  du paragraphe précédent. Compte tenu de la divergence à l'origine de  $K_0$ , la solution est identique soit:

$$j_z(r) = \alpha I_0 \left( \frac{r}{\lambda_L} \right)$$

La constante est déterminée par l'intensité du courant imposé, égale au flux de  $\mathbf{j}$  à travers la section. Soit:

$$I = \int_{r=0}^R j_z(r) 2\pi r dr$$

ou encore:

$$I = 2\pi \alpha \lambda_L^2 \int_{r=0}^{R/\lambda_L} \left( \frac{r}{\lambda_L} \right) I_0 \left( \frac{r}{\lambda_L} \right) d \left( \frac{r}{\lambda_L} \right)$$

ce qui en consultant les tables de mathématiques donne:

$$j_z(r) = \frac{I}{2\pi R \lambda_L} \frac{I_0 \left( r / \lambda_L \right)}{I_1 \left( R / \lambda_L \right)}$$

Il s'agit de nouveau d'un courant circulant au voisinage de la surface sur une épaisseur de l'ordre de  $\lambda_L$  avec une décroissance exponentielle de la densité de courant:

$$j_z(r) = \frac{I}{2\pi R \lambda_L} \exp - \left( \frac{r}{\lambda_L} \right)$$

Ainsi, dans un supraconducteur, le courant ne circule que sur l'épaisseur  $\lambda$  et il est tout à fait inutile de fabriquer de gros fils.

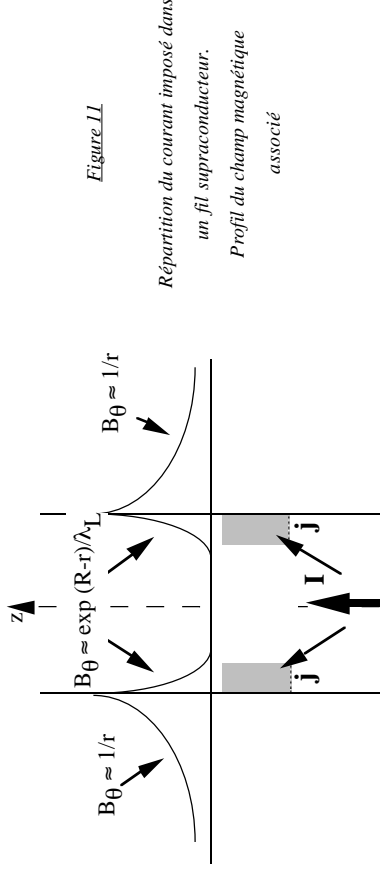


Figure 11

Répartition du courant imposé dans un fil supraconducteur. Profil du champ magnétique associé

Le profil de  $\mathbf{B}$  à l'intérieur de l'échantillon se déduit de celui de  $\mathbf{j}$  via la deuxième équation de London:

$$\mu_0 \text{rot } \mathbf{j} = - \frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{B}$$

qui conduit à l'intérieur du fil à un champ magnétique tangentiel:

$$B_\theta(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \frac{I_1 \left( r / \lambda_L \right)}{I_1 \left( R / \lambda_L \right)}$$

Ce champ décroît exponentiellement à partir de la surface selon:

$$B_\theta(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R \lambda_L} \exp - \left( \frac{R-r}{\lambda_L} \right)$$

Ainsi en se situant au voisinage de la surface le courant électrique évite la création d'un champ magnétique  $\mathbf{B}$  à l'intérieur de l'échantillon, ce qui n'est finalement que la manifestation de l'effet Meissner.

**VIII Epaisseur de London: un argument énergétique**

VIII-1 Profil du champ magnétique

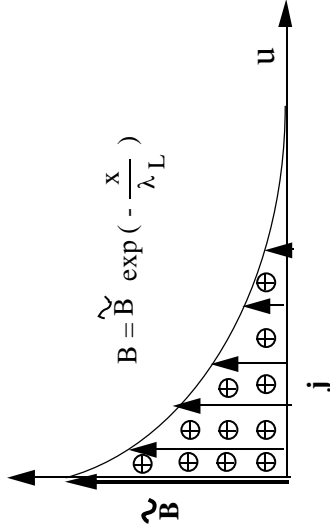


Figure 12

Profil de champ magnétique et densité de courant à partir d'une surface

Dans chaque cas, le champ magnétique décroît exponentiellement à l'intérieur du supraconducteur sur la longueur  $\lambda_L$ .

Il le fait à partir du champ extérieur tangentiel au supraconducteur (il ne peut pas avoir de composante normale en raison des équations de continuité).

Nous noterons  $\tilde{B}$  le champ extérieur tangentiel et nous avons:

$$B = \tilde{B} \exp\left(-\frac{u}{\lambda_L}\right)$$

$$j = \frac{\tilde{B}}{\mu_0 \lambda_L} \exp\left(-\frac{u}{\lambda_L}\right)$$

la densité de courant:

VIII-2 Interprétation de la longueur de London

On peut se demander pourquoi le champ magnétique et le courant décroissent sur la longueur caractéristique  $\lambda_L = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n q^2}}$  et non pas une autre longueur  $\Lambda$  qui lui serait supérieure ou inférieure.

Un argument énergétique vient nous éclairer.

Admettons que le courant et le champ magnétique se localisent effectivement au voisinage de la surface, s'amortissent à l'intérieur du supraconducteur suivant une loi exponentielle, mais le fassent sur une longueur caractéristique  $\Lambda$ , a priori inconnue et que l'on prend comme paramètre :

$$B = \tilde{B} \exp\left(-\frac{u}{\Lambda}\right)$$

$$j = \frac{\tilde{B}}{\mu_0 \Lambda} \exp\left(-\frac{u}{\Lambda}\right)$$

Se donner le profil de  $B$ , c'est se donner celui de  $j$  en raison de l'équation de Maxwell:  $\text{rot } B = \mu_0 j$

Voyons les énergies mises en jeu à l'intérieur du fil:

*Energie magnétique*

L' énergie magnétique de densité  $\frac{B^2}{2 \mu_0}$  s'écrit par unité de surface de supraconducteur:

$$E_{\text{mag}} = \frac{\tilde{B}^2}{2 \mu_0} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{2u}{\Lambda}\right) du = \frac{\Lambda \tilde{B}^2}{4 \mu_0}$$

*Energie cinétique*

Les charges qui circulent portent la densité d' énergie cinétique  $n \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{m}{n q^2} j^2$ .

Leur énergie cinétique totale s'obtient par intégration:

$$E_c = \frac{1}{2} \frac{m}{n q^2} \frac{\tilde{B}^2}{\Lambda^2} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{2u}{\Lambda}\right) du = \frac{1}{4} \frac{m}{n q^2} \frac{\tilde{B}^2}{\Lambda \mu_0^2}$$

*Minimisation de l'énergie*

L'énergie totale est:

$$E = E_c + E_{\text{mag}} = \frac{1}{4} \frac{m}{n q^2} \frac{\tilde{B}^2}{\Lambda \mu_0^2} + \frac{\Lambda \tilde{B}^2}{4 \mu_0}$$

Elle dépend du seul paramètre  $\Lambda$ . La minimisation de cette énergie totale en fonction du paramètre  $\Lambda$  conduit à une longueur de pénétration optimale  $\Lambda_{\text{eff}}$  satisfaisant à  $\left(\frac{\partial E}{\partial \Lambda}\right)_{\Lambda_{\text{eff}}} = 0$ .

Soit:

$$\Lambda_{\text{eff}}^2 = \frac{m}{\mu_0 n q^2} = \lambda_L^2$$

*Interprétation*

La longueur de pénétration  $\lambda_L$  est celle qui minimise l'énergie dans le supraconducteur: somme de l'énergie magnétique du champ et de l'énergie cinétique des électrons.  $\Lambda < \lambda_L$  accroissement de l'énergie cinétique.

$\Lambda > \lambda_L$  accroissement de l'énergie magnétique.

### VIII-3 Equations de London et minimisation de l'énergie

On peut dans le même esprit retrouver la deuxième équation de London en minimisant la somme de l'énergie cinétique des électrons et de l'énergie du champ magnétique dans l'échantillon.

L'énergie cinétique des électrons s'écrit:

$$E_c = \int_{\text{échan}} \frac{1}{2} m v^2 n(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

et si l'on tient compte des relations:

$$\mathbf{j} = n q \mathbf{v} \quad \text{et} \quad \mathbf{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

cette énergie cinétique s'exprime en fonction de  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  selon:

$$E_c = \frac{1}{2} \lambda_L^2 \int_{\text{échan}} (\mathbf{rot} \mathbf{B})^2 d\mathbf{r}$$

L'énergie magnétique s'écrit pour sa part:

$$E_m = \int_{\text{échan}} \frac{\mathbf{B}^2}{2 \mu_0} d\mathbf{r}$$

et en groupant les deux termes, l'énergie totale dans l'échantillon prend la forme:

$$E = \frac{1}{2} \mu_0 \int_{\text{échan}} (\mathbf{B}^2 + \lambda_L^2 (\mathbf{rot} \mathbf{B})^2) d\mathbf{r}$$

Le profil de  $\mathbf{B}$  effectivement réalisé est celui pour lequel  $E$  est stationnaire (voir la justification au paragraphe III-2 du chapitre consacré à la théorie de Ginzburg-Landau)

Considérons une petite variation de champ magnétique  $\delta \mathbf{B}(\mathbf{r})$ . Il s'ensuit une variation d'énergie:

$$\delta E = \frac{1}{2} \mu_0 \int_{\text{échan}} [2 \mathbf{B} \delta \mathbf{B} + 2 \lambda_L^2 \mathbf{rot} \mathbf{B} \delta (\mathbf{rot} \mathbf{B})] d\mathbf{r}$$

En tenant compte de la relation vectorielle:

$$\mathbf{div} (\mathbf{u} \wedge \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w} \quad \text{avec} \quad \mathbf{w} = \delta \mathbf{B} \quad \text{et} \quad \mathbf{u} = \mathbf{rot} \mathbf{B}$$

on obtient:

$$\delta E = \frac{1}{\mu_0} \int_{\text{échan}} \delta \mathbf{B} \cdot [\mathbf{B} + \lambda_L^2 \mathbf{rot} (\mathbf{rot} \mathbf{B})] d\mathbf{r} + \frac{1}{\mu_0} \oint_{\text{échan}} [\delta \mathbf{B} \wedge \mathbf{rot} \mathbf{B}] d\mathbf{S}$$

Avec sur la surface  $\mathbf{B} = \bar{\mathbf{B}}$ , et  $\delta \mathbf{B} = \mathbf{0}$

la première intégrale doit donc être nulle quelque soit  $\delta \mathbf{B}(\mathbf{r})$ , ce qui entraîne:

$$\mathbf{B} + \lambda_L^2 \mathbf{rot} (\mathbf{rot} \mathbf{B}) = \mathbf{0}$$

En tenant compte de

$$\mathbf{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

on retrouve la seconde équation de London:

$$\mu_0 \mathbf{rot} \mathbf{j} = - \frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{B}$$

Ce raisonnement réapparaîtra dans l'établissement des équations de Ginzburg-Landau.

## X- Approche mécanique des fluides. [MAR-p.141]

### IX-1 Charges "superfluides"

La seconde équation de London peut être introduite de façon phénoménologique à partir de la mécanique des fluides.

Pour cela, et cela ne choquera personne, la mer d'électrons d'un supraconducteur est considérée comme un fluide constitué de particules de masse  $m$  de charge  $q$  ne présentant pas la moindre viscosité. Il s'agit là d'une mer d'électrons superfluides.

Si les particules sont soumises aux champs électrique  $\mathbf{E}$  et magnétique  $\mathbf{B}$  et ne subissent aucun frottement visqueux, la dynamique de chacune d'elle obéit à l'équation:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$$

### IX-2 Dérivées droites et dérivées rondes

Pour les moins familiers avec la mécanique des fluides, arrêtons nous quelques instants sur les dérivations partielles et totales.

Considérons un champ de vecteur  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ . Ce champ est tel que à tout instant  $t$  un vecteur  $\mathbf{U}$  est attaché à chaque point  $\mathbf{r}$  de l'espace. Imaginons que ce champ de vecteur évolue avec le temps.

Au cours de l'intervalle de temps  $dt$  séparant  $t$  et  $t+dt$  le vecteur  $\mathbf{U}$  varie en  $\mathbf{r}$  de:

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}, t+dt) - \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right) dt$$

Cette différence est la variation de  $\mathbf{U}$  vue par un observateur installé au point  $\mathbf{r}$ .

Supposons qu'un observateur se déplace à la vitesse  $v_0$ . A l'instant  $t$ , il se trouve en  $\mathbf{r}$ . A l'instant  $t+dt$ , il se trouve en  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$  avec  $d\mathbf{r} = v_0 dt$ .

la différence entre le vecteur  $\mathbf{U}$  vu par l'observateur à l'instant  $t+dt$  (en  $\mathbf{r}+d\mathbf{r}$ ) et celui qu'il voyait là où il était à l'instant  $t$  (en  $\mathbf{r}$ ) s'écrit:

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}+d\mathbf{r}, t+dt) - \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right)_r dt + \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{r}} \right)_t d\mathbf{r} = \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right)_t dt + \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{r}} \right)_t v_0 dt$$

Si le champ de vecteur  $\mathbf{U}$  est le champ de vecteur vitesse du fluide au point  $\mathbf{r}$  à l'instant  $t$ , et si l'observateur se déplace à la vitesse  $v_0$  du fluide, c'est-à-dire se laisse entraîner par le courant, cette équation devient:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}+d\mathbf{r}, t+dt) - \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right)_t dt + \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} \right)_t d\mathbf{r} = \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right)_t dt + \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} \right)_t d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} dt$$

soit aussi, en tenant compte des relations classiques de l'analyse vectorielle qu'il est aisé de vérifier composante par composante en coordonnées cartésiennes:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{grad}(v^2) - \mathbf{v} \wedge \mathbf{rot} \mathbf{v}$$

$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$  est l'accélération du fluide (par rapport à la berge) que mesure un observateur dont les yeux toujours rivés sur le même endroit de la rivière (l'observateur voit s'écouler des molécules différentes)

$\frac{d\mathbf{v}}{dt}$  est l'accélération des molécules de fluide (par rapport à la berge) que mesure un observateur qui suit à tout instant la même partie de fluide, les mêmes molécules.

### IX-3 Equation de Helmholtz

En remplaçant  $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$  par l'expression écrite ci-dessus et en réarrangeant ses termes,

l'équation de la dynamique devient:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \frac{q}{m} \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{grad}(v^2) = \mathbf{v} \wedge (\mathbf{rot} \mathbf{v} + \frac{q}{m} \mathbf{B})$$

En:

- prenant le rotationnel de cette expression,
- tenant compte de l'équation de Maxwell  $\mathbf{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
- posant :  $\mathbf{w} = \mathbf{rot} \mathbf{v} + \frac{q}{m} \mathbf{B}$

on obtient l'équation:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = \mathbf{rot} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$$

connue en hydrodynamique sous le nom d'équation d'Helmholtz.

Elle donne l'évolution du rotationnel de la vitesse lorsque la viscosité est négligeable.

### IX Equation de London

$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = \mathbf{rot} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$  est une équation linéaire du premier ordre. Si à l'instant  $t=0$ ,  $\mathbf{w}$  est nul, sa dérivée l'est aussi et  $\mathbf{w}$  ne varie pas.

Ainsi la condition initiale  $\mathbf{w}=0$  entraîne que  $\mathbf{w}$  reste constamment égal à 0, soit:

$$\mathbf{rot} \mathbf{v} = - \frac{q}{m} \mathbf{B}$$

et en multipliant par  $nq$ :

$$\mathbf{rot} (nq \mathbf{v}) = \mathbf{rot} \mathbf{j} = - \frac{nq^2}{m} \mathbf{B}$$

qui n'est autre que la seconde équation de London.

Mais ne nous y trompons pas: c'est de nouveau une équation d'induction. C'est au point de départ la variation de  $\mathbf{w}$  qui est nulle.

### IX-5 De l'équation de London à l'équation du fluide non visqueux

La bonne façon de procéder n'est bien sûr pas ce que nous avons fait qui, d'une façon ou d'une autre, a nécessité un postulat ad hoc.

La bonne façon de procéder serait de trouver une théorie de la supraconductivité dont l'équation de London se déduirait naturellement.

De l'équation de London se déduit de toute évidence l'équation de Helmholtz avec champ magnétique ce qui permet de conclure que la mer d'électrons se comporte comme un fluide sans viscosité.