

## CHAPITRE III

### Comportement magnétique des supraconducteurs de type I

#### I Le supraconducteur: un milieu magnétique

Du supraconducteur, nous avons vu plusieurs propriétés magnétiques directes ou indirectes:

- Sous champ magnétique extérieur, il est soumis à une force qui l'entraîne dans un phénomène de lévitation.
- En développant des courants supraconducteurs, il génère en son sein un champ magnétique.
- Plongé dans un champ magnétique suffisamment élevé, il quitte l'état supraconducteur pour passer à l'état normal.

De nombreuses propriétés de la supraconductivité s'apprennent à l'aide des concepts du magnétisme, ce qui peut paraître étrange vu la différence profonde entre les réalités microscopiques de l'un et de l'autre des phénomènes.

Nous allons voir tout d'abord dans quelle mesure le supraconducteur peut être considéré comme un milieu magnétique avec son aimantation. Nous verrons très vite que les effets magnétiques sont subtils et qu'il est fondamental de préciser ce que sont exactement le champ magnétique  $\mathbf{B}$  et l'induction magnétique  $\mathbf{H}$ . C'est ce que nous allons commencer par faire.

Nous verrons alors une première série d'effets magnétiques avec le champ critique  $H_c$  et l'état intermédiaire des supraconducteurs, implicitement de type I.

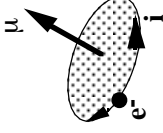
#### II Les milieux magnétiques

#### II-1 Le moment magnétique dipolaire

On enseigne dans les livres élémentaires d'électricité qu'une boucle de courant constitue un dipôle magnétique.

Le moment dipolaire magnétique  $\mathbf{M}$  associé à la boucle de courant est défini comme produit du courant  $i$  et du vecteur surface de la boucle de courant:

$$\mathbf{M} = i \mathbf{s}$$



*Figure 1*

*Boucle de courant engendrée par un électron  
circulant sur une orbite et moment magnétique  
associé*

Le champ magnétique  $\mathbf{b}$  engendré à grande distance (calculé par Biot et Savart) est donné par:

$$\mathbf{b} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [ 3 (\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} - r^2 \mathbf{M} ]$$

#### II-2 Moment magnétique orbital

Si l'on s'en tient à l'approche quasi classique du modèle de Bohr, les électrons gravitant sur les orbites électroniques de l'atome constituent autant de boucles de courant et donc autant de dipôles magnétiques élémentaires.

Les effets des moments magnétiques s'annihilent lorsque deux électrons "tournent" sur une même orbite en sens contraire et à même vitesse. Mais une contribution résultante non nulle apparaît sur l'atome lorsque plus d'électrons "tournent" dans un sens que dans l'autre.

Un atome "magnétique" peut être considéré comme une boucle de courant à laquelle est associé un moment magnétique  $\mathbf{M}$ .

Chacun le sait, l'image classique décrite ci-dessus est quelque peu erronée puisque en mécanique quantique, les notions de trajet et de vitesse perdent leur sens.

Toutefois, le moment cinétique orbital  $\mathbf{L}$  reste une réalité physique auquel est associé un moment magnétique  $\mathbf{M}$  par le rapport gyromagnétique. La mécanique quantique donne les règles de construction de  $\mathbf{L}$ .

La situation est plus complexe lorsque l'on tient compte du spin de l'électron qui conduit à un spin total  $\mathbf{S}$  de l'atome puis à un moment cinétique total  $\mathbf{J}$ , somme de  $\mathbf{L}$  et de  $\mathbf{S}$ .

En dernier ressort, le moment magnétique est lié au moment cinétique total par des règles de construction telles que les règles de Hund.

Nous sommes donc parfaitement conscients des limites du modèle de Bohr et de la simple boucle de courant. Mais c'est ce modèle qui permet le mieux de comprendre l'équivalence entre courants et aimantation.

### II-3 Aimantation et densité d'aimantation

On appelle aimantation  $\mathbf{M}$  d'un matériau la somme vectorielle des moments magnétiques sur l'ensemble du matériau:

$$\mathbf{M} = \sum \mathbf{M}_i$$

La densité d'aimantation  $\mathbf{I}$  au point  $\mathbf{r}$  est l'aimantation par unité de volume  $d\mathbf{M}/d\tau$  autour de ce point:

$$\mathbf{I}(\mathbf{r}) = d\mathbf{M} / d\tau .$$

La densité d'aimantation peut être uniforme ou non, selon que la distribution des moments magnétiques  $\mathbf{M}$  est homogène ou ne l'est pas.

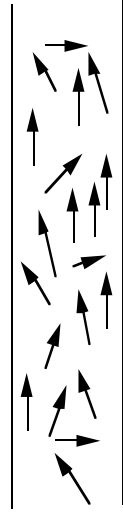


Figure 2

Distribution de moments magnétiques élémentaires

$\mathbf{I}(\mathbf{r})$  est la moyenne de l'aimantation par unité de volume, moyenne effectuée sur un volume certes petit mais suffisamment grand pour gommer les effets de fluctuation atomique.

Toutes les grandeurs macroscopiques de l'électromagnétisme, fussent-elles locales, sont le résultat de moyennes effectuées à l'échelle, disons du millier d'atomes.

### II-4 Champ magnétique créé par un milieu aimanté

Chacun des dipôles  $\mathbf{M}_i$  crée en un point  $\mathbf{r}$  de l'espace (intérieur ou extérieur à la matière aimantée) un champ magnétique élémentaire  $\mathbf{b}_i(\mathbf{r})$ . En vertu du principe de superposition, le champ magnétique total  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  créé en  $\mathbf{r}$  par l'ensemble de la matière aimantée est simplement la somme des champs magnétiques élémentaires, soit:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \sum \mathbf{b}_i(\mathbf{r}).$$

### II-5 Les courants ampériens

Dans les paragraphes précédents, nous avons successivement:

- i) considéré les courants orbitaux  $i$ ,
- ii) isolé les moments dipolaires magnétiques  $\mathbf{M}_i$  associés à chaque boucle de courant,
- iii) déduit les champs magnétiques élémentaires  $\mathbf{b}_i(\mathbf{r})$  créés par chacun des moments magnétiques dipolaires  $\mathbf{M}_i$ ,
- iv) effectué la somme de ces champs élémentaires et déduit le champ magnétique total  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  créé en un point  $\mathbf{r}$  par l'ensemble des courants orbitaux.

Une alternative à cette procédure consiste à effectuer en premier lieu (en vertu du théorème de superposition) la somme des courants microscopiques orbitaux.

Cette somme conduit à une distribution de courants résultants appelés courants ampériens. Ces courants résultants s'expriment au travers d'une densité de courants volumiques  $\mathbf{j}_a^v$  et d'une densité de courants surfaciques  $\mathbf{j}_a^s$ . De cette répartition de courants ampériens, il est possible de calculer directement le champ magnétique  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  en utilisant la loi de Biot et Savart.

Il y a donc deux moyens de calculer le champ magnétique  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ :

- en sommant les champs élémentaires (calculés par Biot et Savart) créés par les dipôles magnétiques microscopiques.

- en prenant la résultante des courants élémentaires et en utilisant la relation de Biot et Savart.

Chacun des chemins permet de passer des boucles de courant orbital au champ magnétique total.

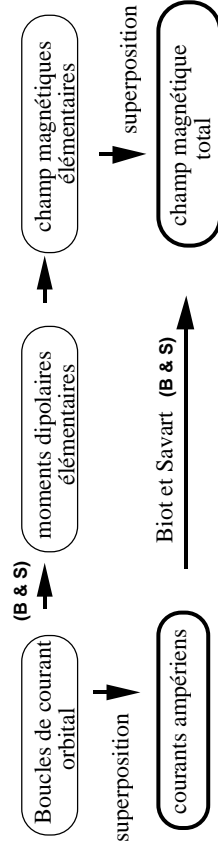


Figure 3 Deux façons équivalentes de déterminer le champ magnétique créé par un ensemble de boucles de courant

**II-6 Expression des courants ampériens**

La distribution des moments magnétiques donnée par  $\mathbf{I}$  et celle des courants ampériens donnée par  $\mathbf{j}^a$  et  $\mathbf{j}^s$  conduisant au même champ magnétique  $\mathbf{B}$ , on imagine aisément qu'il existe des relations entre ces distributions.

Ces relations sont données par les équations locales:

$$\mathbf{j}^a = \text{rot } \mathbf{I} \quad \text{et} \quad \mathbf{j}^s = \mathbf{I} \wedge \mathbf{n}$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire localement perpendiculaire à la surface du matériau, orienté dans le sens de la normale sortante.

Ces équations locales sont démontrées dans les livres d'électricité à grands coups de calcul vectoriel. On en trouve une démonstration plus qualitative et non moins convaincante dans le chapitre d'électromagnétisme de Feynmann. [FEY électro-chap 36] [BER électro-4-chap 5]

**II-7 Courants ampériens dans un cylindre infini uniformément aimanté**

Voyons l'argument qualitatif amenant aux courants surfaciques. Celui conduisant aux courants volumiques est un peu plus lourd.

Considérons un cylindre infini aimanté uniformément. Représentons une section droite de ce cylindre et représentons à l'intérieur de cette section les boucles de courant des moments orbitaux (figure 4). Dans cette figure, les moments dipolaires élémentaires sont égaux et pointent vers le fond de la feuille. Les boucles de courant sont contenues dans la section droite et sont uniformément réparties.

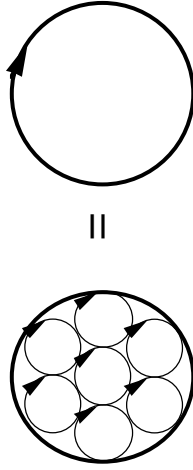


Figure 4

Equivalence entre une assemblée uniformément répartie de boucles de courants et un courant surfacique ampérien

Il apparaît que en chaque point de tangence des boucles de courant, le courant résultant est nul et que finalement ne seront pas compensées uniquement les parties de boucles de courant tangentes à la surface extérieure.

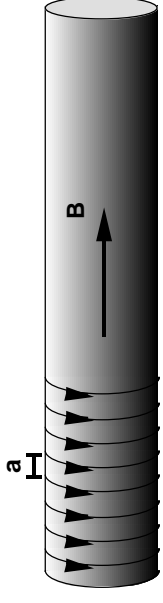


Figure 5: Courants ampériens d'un barreau uniformément aimanté

Le courant résultant est un courant purement surfacique et uniforme. La densité de courant surfacique est égale au courant orbital  $i$  divisé par la distance interatomique  $a$ :  $\mathbf{j}_s^a = i/a$ .

En tenant compte de la relation  $i = M/s$  où  $s$  est la surface d'un atome et en appelant  $v$   $= as$  le volume atomique, il vient:  $\mathbf{j}_s^a = nM$  où  $n$  est le nombre d'atomes par unité de volume. Ainsi la densité de courant ampérien surfacique est égale à la densité d'aimantation. La densité d'aimantation  $\mathbf{I}$  étant orientée suivant l'axe du cylindre la densité de courant surfacique étant tangentielle au cylindre, on montre que, localement, on a:

$$\mathbf{j}_s^a = \mathbf{I} \wedge \mathbf{n}$$

Le cylindre aimanté uniformément se comporte tout simplement comme un solénoïde portant une densité de courants surfaciques  $\mathbf{j}_s^a$ , ce qui conduit à un champ magnétique  $\mathbf{B}$  nul à l'extérieur de la matière et valant  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_s^a$  à l'intérieur.

Dans cet exemple où l'aimantation est uniforme, la densité de courant ampérien volumique est nulle. Cela apparaît aussi bien des formules que de l'analyse microscopique qui montre la compensation des courants des boucles voisines. Pour qu'une telle compensation ne se produise pas, il faut que les densités de boucles de courant varient lorsque l'on se déplace dans l'échantillon.

**II-8 Courants ampériens d'une sphère uniformément aimantée**

Considérons l'exemple plus complexe d'une sphère aimantée uniformément dans la direction  $Oz$  et placée dans le vide.

L'uniformité de l'aimantation rend nuls les courants ampériens volumiques mais induit des courants ampériens surfaciques tels que ceux indiqués sur la figure 10. Ils circulent sur des cercles d'axe  $oz$  et la densité d'aimantation:

$$\mathbf{j}_s^a = \mathbf{I} \sin\theta$$

Une telle distribution de courant crée un champ magnétique uniforme à l'intérieur de la sphère:

$$\mathbf{B}^a = 2/3 \mu_0 \mathbf{I} \quad \text{à l'intérieur de la sphère}$$

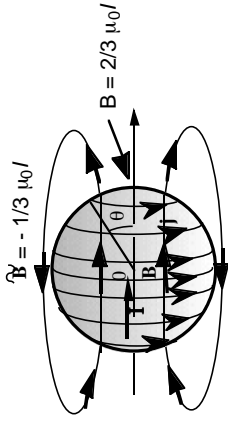


Figure 6

Distribution de courant dans une sphère uniformément aimantée

La distribution de courant crée aussi une distribution de champ magnétique à l'extérieur de la sphère. Cette distribution n'a pas de forme simple mais on peut facilement voir, à l'aide des règles de discontinuités, qu'il vaut  $\tilde{\mathbf{B}} = -1/3 \mu_0 \mathbf{I}$  juste au-dessus et juste en dessous de la sphère et  $\mathbf{B}^a = 2/3 \mu_0 \mathbf{I}$  juste à droite et juste à gauche de la sphère.

### II-9 Champ magnétique $\mathbf{B}$

Un système magnétique est généralement composé de deux parties:

- i) Un circuit électrique dans lequel l'expérimentateur fait circuler un courant  $\mathbf{I}^0$  ou plus généralement une distribution de densités de courants volumiques  $\mathbf{j}_v^0$  et surfaciques  $\mathbf{j}_s$ ; ces courants sont appelés courants des conducteurs et sont totalement maîtrisables par l'expérimentateur qui dispose d'une batterie (c'est le grand solénoïde extérieur).
- ii) La matière aimantée de densité d'aimantation  $\mathbf{I}$ , "parcourue" par les courants ampériens de densités volumiques  $\mathbf{j}_v^a$  et surfaciques  $\mathbf{j}_s^a$ . Les densités de courant ampériens sont liées à  $\mathbf{I}$  et ne sont pas directement maîtrisables par l'expérimentateur.

Très souvent la matière est aimantée par réaction au champ magnétique créé par les courants  $\mathbf{I}^0$ .

Cependant, quelle que soit leur origine, tous les courants résultent de déplacements d'électrons et tous contribuent au même titre, qu'ils soient conducteurs ou ampériens, au champ magnétique  $\mathbf{B}$ , à l'intérieur comme à l'extérieur de la matière aimantée.

Le champ magnétique obéit en particulier à la relation d'Ampère locale:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{j}_v^0 + \mathbf{j}_v^a)$$

Les discontinuités de  $\mathbf{B}$  apparaissent lors de la traversée de nappes de courants d'origine conducteurs ou ampériens.

Il n'est bien sûr pas interdit de décomposer  $\mathbf{B}$  en deux contributions, celle  $\mathbf{B}^0$  due aux courants de conducteurs, et celle  $\mathbf{B}^a$  due aux courants ampériens, et d'écrire pour chacun d'eux la forme locale du théorème d'Ampère avec les courants dont ils sont issus.

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^0 + \mathbf{B}^a$$

$$\text{rot } \mathbf{B}^0 = \mu_0 \mathbf{j}_v^0 \quad \text{rot } \mathbf{B}^a = \mu_0 \mathbf{j}_v^a$$

### II-10 Sphère uniformément aimantée placée dans un champ extérieur uniforme.

Considérons un grand solénoïde parcouru par une densité de courant  $\mathbf{j}^0$  et au sein duquel règne le champ  $\mathbf{B}^0$ . Plaçons une sphère dans ce solénoïde une sphère. le champ magnétique devient:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^0 + \mathbf{B}^a$$

avec en particulier:

- à l'intérieur de la sphère:  $\mathbf{B} = \mathbf{B}^0 + 2/3 \mu_0 \mathbf{I}$
- à l'extérieur, juste au dessus de la sphère  $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B}^0 - 1/3 \mu_0 \mathbf{I}$
- à l'extérieur, à l'avant et l'arrière de la sphère  $\mathbf{B} = \mathbf{B}^0 + 2/3 \mu_0 \mathbf{I}$

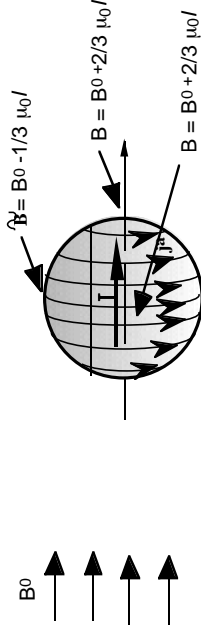


Figure 7 Distribution de courant dans une sphère uniformément aimantée placée dans un champ extérieur

### II-11 Définition de l'excitation magnétique $\mathbf{H}$

Par définition, la différence entre le champ magnétique  $\mathbf{B}$  et la densité d'aimantation  $\mu_0 \mathbf{I}$  est appelée excitation magnétique et est notée  $\mathbf{H}$ .

$$\mu_0 \mathbf{H} = \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{I} \quad \text{et donc : } \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{I})$$

Cette définition est valable en tout point de l'espace. Cela signifie que, à l'extérieur de la matière où  $\mathbf{I} = \mathbf{0}$ ,  $\mu_0 \mathbf{H}$  est simplement égal à  $\mathbf{B}$ .

II-12 Charges magnétiques et calcul de  $\mathbf{H}$ 

En décomposant  $\mathbf{B}$  en ses 2 origines, on peut écrire:

$$\mu_0 \mathbf{H} = \mathbf{B}^0 + \mathbf{B}^a - \mu_0 \mathbf{I}$$

et il est habituel de décomposer  $\mathbf{H}$  en deux termes:  $\mathbf{H}^0$  et  $\mathbf{H}^m$

$$\mu_0 \mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{H}^0 + \mu_0 \mathbf{H}^m$$

où:

$$\mu_0 \mathbf{H}^0 = \mathbf{B}^0 \quad \text{et} \quad \mu_0 \mathbf{H}^m = \mathbf{B}^a - \mu_0 \mathbf{I}$$

$\mathbf{H}^0$  est dû aux courants des conducteurs.

$\mathbf{H}^m$  est dû à la matière aimantée.

L'intérêt de ces regroupements est qu'il existe une façon artificielle mais très commode de calculer  $\mathbf{H}^m$ . Cette méthode consiste à introduire les entités non physiques que sont les charges magnétiques, analogues à des charges électriques de polarisation.

Les charges magnétiques volumiques  $\rho_m$  et surfaciques  $\sigma_m$  sont définies par les relations:

$$\rho_m = \text{div } \mathbf{I} \quad \text{et} \quad \sigma_m = \mathbf{n} \cdot \mathbf{I}$$

$\mathbf{H}^m$  est calculé comme  $\mathbf{E}$  l'est en électrostatique avec une loi de Coulomb. Ici les charges électriques sont remplacées par les charges magnétiques et la constante  $\mu_0$  vient se substituer à  $1/\epsilon_0$ .

A l'extérieur de la matière aimantée:

$$\mu_0 \mathbf{H}^m = \mathbf{B}^a$$

$$\mu_0 \mathbf{H}^0 = \mathbf{B}^0$$

$$\mu_0 \mathbf{H} = \mathbf{B}$$

et il est équivalent de calculer le champ magnétique en passant par les charges magnétiques ou les courants ampériens.

A l'intérieur de la matière:

$$\mu_0 \mathbf{H}^m = \mathbf{B}^a - \mu_0 \mathbf{I}$$

A l'intérieur de la matière aimantée  $\mathbf{H}^m$  est appelé champ démagnétisant.

II-13 Equations locales de  $\mathbf{B}$  et de  $\mathbf{H}$ 

$\mathbf{B}$  obéit aux équations locales des champs magnétiques et à leurs règles de discontinuité, à condition de tenir compte de tous les courants:

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad \text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{j}^0 + \mathbf{j}^a)$$

$$\mathbf{B}_{n1} = \mathbf{B}_{n2} \quad (\mathbf{B}_{t1} - \mathbf{B}_{t2}) \wedge \mathbf{n}_{12} = \mu_0 (\mathbf{j}_s^0 + \mathbf{j}_s^a)$$

Le théorème d'Ampère appliqué à  $\mathbf{B}$  stipule que la circulation de  $\mathbf{B}$  sur un circuit fermé est égale à tous les courants ( $\times \mu_0$ ) qui traversent ce circuit.

$\mathbf{H}$  est hybride:

Il obéit aux règles de  $\mathbf{B}$  pour la partie  $\mathbf{B}^0 / \mu_0$  qui provient des courants extérieurs

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{H}^0 &= 0 & \text{rot } \mathbf{H}^0 &= \mathbf{j}^0 \\ (\mathbf{H}_2^0 - \mathbf{H}_1^0) \cdot \mathbf{n}_{12} &= 0 & (\mathbf{H}_{t1}^0 - \mathbf{H}_{t2}^0) \wedge \mathbf{n}_{12} &= \mathbf{j}_s^0 \end{aligned}$$

mais il obéit aux règles communes des champs électriques pour ce qui est de la partie  $\mathbf{H}^m$ .

$$\text{div } \mathbf{H}^m = \mu_0 \rho_m \quad \text{rot } \mathbf{H}^m = 0$$

$$(\mathbf{H}_2^m - \mathbf{H}_1^m) \cdot \mathbf{n}_{12} = \sigma_m \quad \mathbf{H}_{t1}^m = \mathbf{H}_{t2}^m$$

Soit au total :

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}^0 \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_{t1} - \mathbf{H}_{t2} = \mathbf{j}_s^0 \wedge \mathbf{n}_{12}$$

Bien que  $\mathbf{H}$  soit un être hybride, nous verrons qu'il est très pratique, essentiellement parce que son rotationnel et la discontinuité des composantes tangentielles ne dépendent que des courants des conducteurs.

Le théorème d'Ampère sur  $\mathbf{H}$  dit que la circulation de  $\mathbf{H}$  sur un circuit fermé est égale à la somme des courants portés sur les conducteurs qui traversent ce circuit.

II-14 Excitation magnétique  $\mathbf{H}$  dans un sphère uniformément aimantée isolée

L'aimantation étant uniforme, la densité de charges magnétiques volumique est nulle, reste la seule densité de charge surfacique:

$$\sigma_m = \mathbf{n} \cdot \mathbf{I}$$

dont la répartition se trouve en

$$\sigma_m = I \cos \theta$$

Une telle distribution de charge crée à l'intérieur de la sphère un champ magnétique uniforme:

$$\mathbf{H}^m = -\frac{\mathbf{I}}{3}$$

Cette distribution de charge crée aussi une excitation uniforme à l'extérieur de la sphère mais celui ci est complexe. Notons simplement qu'en raison des équations de

continuité, elle vaut  $-\frac{I}{3}$  au dessus et en dessous de la sphère (comme en son intérieur) et  $\frac{2I}{3}$  à sa droite et à sa gauche.

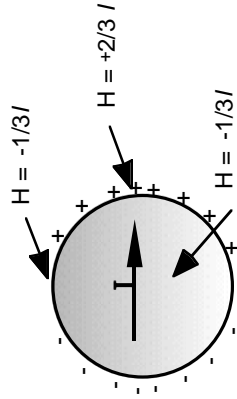


Figure 8

Excitation magnétique  $H$  à l'intérieur et au voisinage d'une sphère uniformément aimantée

II-15 Excitation magnétique  $H$  dans un sphère uniformément aimantée placée dans un solénoïde.

Le solénoïde crée une excitation magnétique  $H^0$  qui vient s'ajouter à  $H^m$ . Ainsi à l'intérieur de la sphère, l'excitation magnétique:

$$H = H^0 + H^m$$

Elle vaut en particulier:

- à l'intérieur de la sphère:  $H = H^0 - \frac{I}{3}$
- à l'extérieur, juste au dessus de la sphère  $\tilde{H} = H^0 - \frac{I}{3}$
- à l'extérieur, juste à droite de la sphère  $H = H^0 + \frac{2I}{3}$

ce qui correspond aussi en tout point de l'espace ( $I$  est nul dans le vide):

$$\mu_0 \tilde{H} = B - \mu_0 I$$

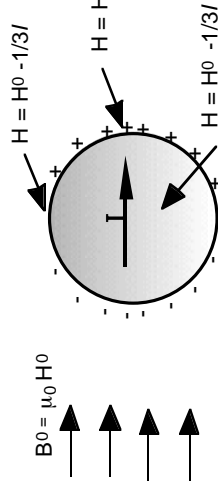


Figure 9

Excitation magnétique  $H$  à l'intérieur et au voisinage d'une sphère uniformément aimantée placée dans un champ magnétique uniforme

### II-16 Cas général d'un ellipsoïde placé dans un champ magnétique

Un ellipsoïde placé dans un champ magnétique uniforme  $B^0$  dirigé suivant un de ses axes principaux possède la propriété de s'aimanter uniformément.

Dans l'ellipsoïde  $I$ ,  $B$  et  $H$  sont uniformes, la sphère représentant un cas particulier.

La généralisation de la sphère à l'ellipsoïde s'effectue en introduisant un coefficient de champ démagnétisant  $N$  dépendant de la géométrie de l'échantillon.

$I$  étant uniforme dans un ellipsoïde de coefficient de champ démagnétisant  $N$ :

$$H^m = -N I \quad \text{et} \quad B^a = \mu_0 (1-N) I$$

c/a	0 (plaque avec champ perpendiculaire)	0.5	1 (sphère)	2	4	10	$\infty$ (cylindre infini)
N	1	1/3	0.25	0.1	0.07	0	0

Tableau I: Coefficients de champ démagnétisant d'ellipsoïdes de révolution dont l'aimantation est dirigée suivant l'axe de symétrie

On trouve dans tous les livres de magnétisme des tables et des abaques donnant les coefficients de champ démagnétisant. Quelques-uns sont rapportés au tableau I pour des ellipsoïdes de révolution. La figure 10 schématise l'aimantation, le champ et l'excitation magnétique dans l'ellipsoïde et à l'extérieur, au voisinage immédiat des "pôles". Les figures 10 et 11 montrent les profils des différents champs en coupe.

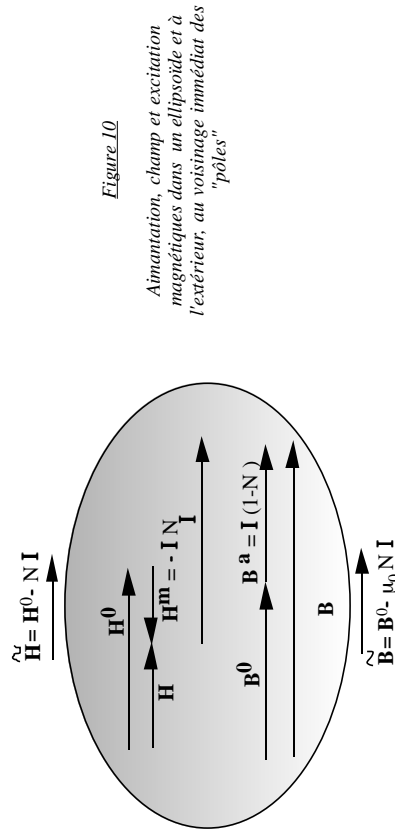


Figure 10

Aimantation, champ et excitation magnétiques dans un ellipsoïde et à l'extérieur, au voisinage immédiat des "pôles"

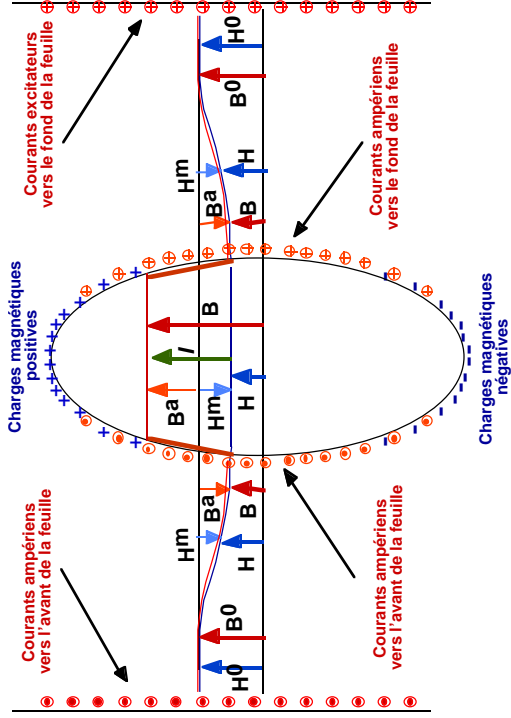


Figure 11 Profil des champs et de l'aimantation dans un système composé d'un solénoïde extérieur et d'un ellipsoïde aimanté.

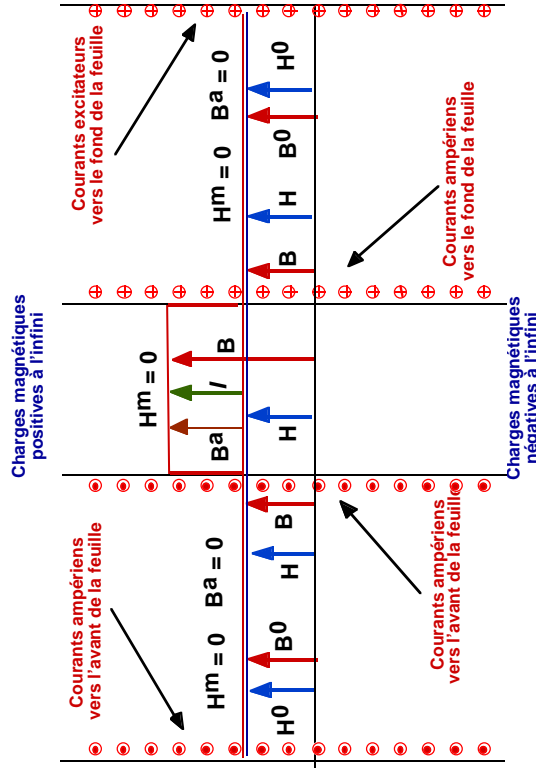


Figure 12.: Profil des champs et de l'aimantation dans un cylindre ( ellipsoïde infiniment long) aimanté placé dans un solénoïde extérieur

### II-17 Aimantation d'un corps

Dans le cas général d'un échantillon de forme quelconque, la répartition des courants ampériens et des charges magnétique est complexe, d'autant plus qu'ils apparaissent à la fois en surface et en volume. Les distributions des champs **B** et **H** et de la densité d'aimantation **I** sont aussi très complexes.

Les magnétomètres nous fournissent l'aimantation total **M** de l'échantillon:

$$\mathbf{M} = \int_{\text{échantillon}} \mathbf{I}(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} = \int_{\text{échantillon}} \left[ \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r})}{\mu_0} - \mathbf{H}(\mathbf{r}) \right] d\mathbf{r}$$

ou encore en introduisant les valeurs moyennes sur l'échantillon:

$$\langle \mathbf{I} \rangle = \frac{\mathbf{M}}{V} = \langle \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \rangle - \langle \mathbf{H} \rangle$$

### III Le supraconducteur : un aimant

#### III-1 Moment magnétique orbital

Avec le modèle de Bohr de moment magnétique orbital, on distingue parfaitement à la fois les moments magnétiques atomiques, et les courants ampériens résultant des courants orbitaux.

Les deux sont "présents" et il est tout à fait équivalent de travailler avec les uns ou avec les autres.

Il est équivalent de calculer les champs magnétiques à partir de la densité d'aimantation **I** ou des courants ampériens.

Les charges magnétiques sont purement fictives mais facilitent grandement les calculs.

#### III-2 Moment magnétique de spin

Si les atomes portent un spin, ils se comportent de nouveau comme des moments magnétiques **M** élémentaires, et ceci en l'absence de boucle de courant orbital.

Les moments magnétiques atomiques sont présents et avec eux la densité d'aimantation **I** mais il n'y a plus de "vrais" courants ampériens, somme de courants orbitaux élémentaires.

Mais il n'en demeure pas moins que pour les calculs de  $\mathbf{B}$ , on peut imaginer que des courants ampériens sont présents pourvu qu'ils ils soient déduits de  $\mathbf{I}$  selon les relations habituelles.

### III-3 Supraconducteur: milieu magnétique

Contrairement aux systèmes précédents, les atomes d'un matériau supraconducteur ne portent pas de moments magnétiques.

Mais, comme dans le matériau magnétique orbital, le supraconducteur voit des courants circuler au voisinage de sa surface et ces courants ont une particularité essentielle: ils ne sont pas apportés directement par l'expérimentateur. Ils sont créés par influence, c'est à dire qu'ils sont de même nature que les courants ampériens.

Si l'on considère les courants supraconducteurs comme des courants ampériens, on peut imaginer qu'il existe une densité d'aimantation sous-jacente à partir de laquelle tous les calculs de champ créés par les courants supraconducteurs pourront être effectués.

On peut définir une densité d'aimantation du supraconducteur à condition de la lier aux courants supraconducteurs comme on le faisait des ampériens par la relation:

$$\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{I}$$

Rien n'empêche d'introduire les charges magnétiques dont la réalité physique devient délirante mais qui permettent comme dans un milieu magnétique de calculer  $\mathbf{H}$ .

### III-4 Courants surfaciques et courants supraconducteurs

Au sens strict, les courants supraconducteurs ne sont pas des courants de surface puisqu'ils s'étalent sur l'épaisseur de London. L'aimantation qui leur est associée n'est pas uniforme à l'intérieur et nulle à l'extérieur.

Elle est uniforme à l'intérieur de l'échantillon au-delà de l'épaisseur de London.

Selon l'échelle d'observation et l'importance des interfaces on pourra:

-ou bien tenir compte de la distribution effective des courants et décrire le détail des distributions d'aimantation.

-ou bien "repousser" les courants supraconducteurs sur la surface de l'échantillon et en faire des courants surfaciques, ce qui revient à oublier la zone de transition de London.

## IV Ellipsoïde supraconducteur placé dans un champ magnétique uniforme

### IV-1 Distribution des champs

Négligeons dans un premier temps la zone de London. A l'intérieur de l'ellipsoïde,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{I}$  sont uniformes.

Il nous suffit de reprendre la figure de distribution des champs dans un aimant plongé dans un champ magnétique ( figure 10) et d'écrire que le champ  $\mathbf{B}$  est nul à l'intérieur de l'ellipsoïde, soit:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^0 + \mu_0 \mathbf{I} (1-N) = \mathbf{0}$$

Cela impose la valeur de  $\mathbf{I}$ :

$$\mathbf{I} = - \frac{\mathbf{B}^0}{\mu_0 (1-N)}$$

La valeur de  $\mathbf{H}$  à l'intérieur de l'ellipsoïde est:

$$\mathbf{H} = - \mathbf{I} = \frac{\mathbf{B}^0}{(1-N) \mu_0}$$

La valeur de  $\mathbf{B}$  aux pôles est:

$$\tilde{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{B}^0}{(1-N)}$$

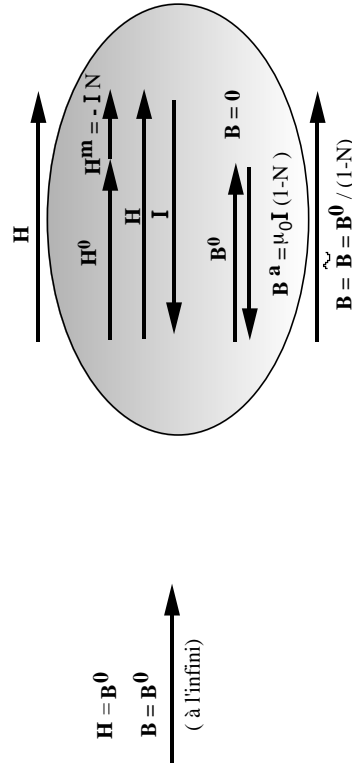


Figure 13: Répartition de l'aimantation, du champ et de l'excitation magnétique dans un ellipsoïde supraconducteur plongé dans un champ magnétique extérieur uniforme. Sur ce schéma, la zone de London est supposée très petite et n'est pas prise en considération.

Le cas de la sphère est celui où  $N = 1/3$

$$\mathbf{H} = - \mathbf{I} = \frac{3\mathbf{B}^0}{2 \mu_0} = \frac{3\mathbf{H}^0}{2} \quad \tilde{\mathbf{B}} = \frac{3\mathbf{B}^0}{2}$$

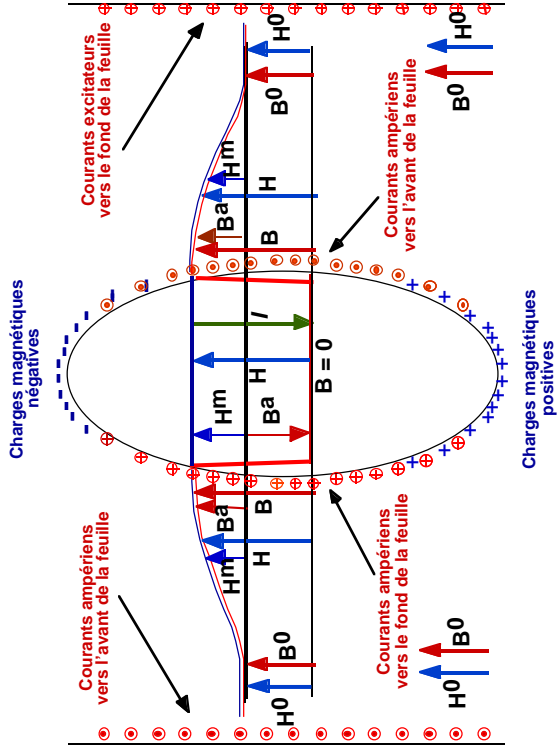


Figure 14. Profil des différents champs magnétiques et de leurs composante au sein et au voisinage d'un ellipsoïde supraconducteur placé dans un champ magnétique uniforme

Figure 14. Profil des différents champs magnétiques et de leurs composante au sein et au voisinage d'un barreau supraconducteur infiniment long placé dans un champ magnétique uniforme

IV-2 Epaisseur de London

Tenons compte de la zone de London.

Lorsque l'on rentre dans un supraconducteur, le champ magnétique décroît exponentiellement à partir du champ magnétique extérieur toujours tangentiel.

Au voisinage d'un supraconducteur elliptique placé dans un champ uniforme, le champ extérieur est maximal aux pôles. Il vaut  $\vec{B} = \frac{B^0}{N-1}$

En rentrant dans l'échantillon à partir du pôle:

l'excitation magnétique est inchangée et est constante dans tout l'échantillon:

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}) = \frac{\mathbf{B}^0}{\mu_0} = \frac{\mathbf{B}^0}{\mu_0 (1-N)}$$

le champ magnétique varie comme:

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}) = \vec{B} \exp(-u/\lambda_L) = \frac{\mathbf{B}^0}{(N-1)} \exp(-u/\lambda_L)$$

la densité d'aimantation:

$$\mathbf{I}(\mathbf{u}) = \frac{\mathbf{B}(\mathbf{u})}{\mu_0} - \mathbf{H}(\mathbf{u}) = \frac{\mathbf{B}^0}{\mu_0 (1-N)} ( \exp(-u/\lambda_L) - 1 )$$

et la densité de courant est :

$$\mathbf{j} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \lambda_L} \exp(-u/\lambda_L) = \frac{B^0}{(N-1) \mu_0 \lambda_L} \exp(-u/\lambda_L)$$

IV-3 Retour sur la mesure de la longueur de London

On peut revenir sur le paragraphe IV-4 du chapitre II, où il a été montré que l'aimantation totale d'une plaque mince était fortement dépendante de l'épaisseur de London, et qu'en retour on disposait avec les mesures d'aimantation d'une méthode expérimentale de détermination de  $\lambda_L$ .

L'aimantation prenait la forme:

$$\mathbf{M} = \frac{V}{\mu_0} \left[ \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{+d/2} \mathbf{B}(z) dz - \mathbf{B}^0 \right]$$

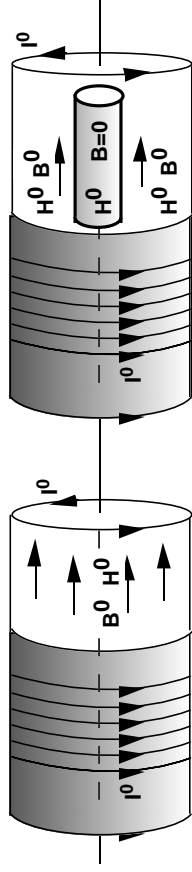
justifié par le fait que le champ  $\mathbf{H} = \mathbf{H}^0 = \frac{\mathbf{B}^0}{\mu_0}$

**V Champ critique**

**V-1 Champ et excitation magnétiques dans un barreau supraconducteur infini**

Considérons un "grand" solénoïde parcouru par une distribution de courant  $j^0$  telle qu'apparaisse en son sein un champ magnétique  $B^0$  uniforme. Dans le vide (figure 15-a) l'excitation magnétique  $H = H^0$  est liée au champ magnétique  $B^0$  par:

$$B^0 = \mu_0 H^0$$



(a) (b) *Figure 15: Champ et excitation magnétiques dans un solénoïde vide (b) dans l'ensemble solénoïde, barreau supraconducteur infini*

Plaçons dans ce solénoïde un barreau supraconducteur infini (figure 1-b). Par effet Meissner, le champ magnétique  $B$  devient nul à l'intérieur de l'échantillon (avec adaptation sur l'épaisseur de London).

- En raison de la forme (infiniment allongée) de l'échantillon qui présente un champ démagnétisant nul:
- le champ magnétique  $B$  reste égal à  $B^0$  en dehors du barreau supraconducteur.
- l'excitation magnétique  $H$  reste égale à  $H^0$  partout : à l'extérieur et à l'intérieur de l'échantillon.
- Contrairement à  $B$ ,  $H$  n'est pas nul à l'intérieur de l'échantillon.

**V-2 Résultat expérimental élémentaire du champ critique**

Lorsque le champ magnétique  $B^0$  extérieur à l'échantillon cylindrique atteint une valeur critique  $B_c$ , le matériau quitte l'état supraconducteur et passe à l'état normal.

Cela correspond aussi au moment où l'excitation magnétique intérieure à l'échantillon  $H$  atteint l'excitation critique  $H_c = B_c / \mu_0$ .

Lorsque la forme de l'échantillon est complexe, les distributions de  $B$  et  $H$  sont loin d'être aussi simples,  $B$  reste nul à l'intérieur de l'échantillon, mais les valeurs de  $B$  à l'extérieur de l'échantillon, et de  $H$  à l'intérieur et à l'extérieur, sont compliquées et difficilement calculables.

Va très vite se poser la question de savoir quelle est elle la grandeur pertinente qui limite la supraconductivité  $B^0$ ? ,  $H$  à l'intérieur de l'échantillon? ou une autre grandeur?

Nous savons que  $B$  à l'intérieur de l'échantillon n'est pas pertinent puisqu'il est nul.

Pour l'instant retenons  $H$  à l'intérieur de l'échantillon.

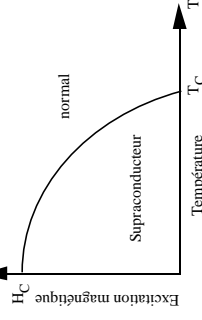
**V-3 Diagramme (H,T)**

Nous savions déjà qu'il existait une température  $T_c$  au delà de laquelle le matériau perdait ses propriétés supraconductrices. Il existe maintenant une excitation magnétique  $H_c$  au delà de laquelle la phase supraconductrice disparaît.

L'excitation magnétique critique  $H_c$  est en fait une fonction de la température:  $H_c(T)$ .

$H_c$  est maximum à  $T=0K$  et chute très naturellement à 0 lorsque  $T$  atteint  $T_c$ .

La stabilité des phases s'exprime dans un diagramme de phase  $(H,T)$  tel que celui de la figure 2. Ce diagramme est de même nature que le diagramme  $(P,T)$  qui donne la stabilité des phases solide, liquide ou gazeuse d'un corps.



*Figure 16: Diagramme des phases magnétiques d'un supraconducteur*

La ligne critique qui sépare la phase supraconductrice de la phase normale est  $H_c(T)$

Expérimentalement elle se décrit en première approximation par:

$$H_c = H_{c0} \left( 1 - \frac{T^2}{T_c^2} \right)$$

Quelques valeurs de  $H_c$  sont rapportées dans le tableau II [ZEM-p.388]

Elément	Al	Cd	Ga	La	Nb II	Pb	Sn	Ti	Zn
$T_c$ (K)	1.2	0.56	1.10	4.8	8.9	7.22	3.74	0.39	0.93
$H_c(0)$ (Oe)	106	28.8	50.3	1030	1960	812	307	100	52.5

Tableau L : Excitations critiques à température nulle de quelques corps purs

#### V-4 Les unités CGS

Les unités internationales sont le tesla (T) pour le champ magnétique  $\mathbf{B}$  et l'ampère par mètre (A/m) pour l'excitation magnétique  $\mathbf{H}$ .

Si dans le vide le champ magnétique est  $B^0 = 1T$ ,

l'excitation magnétique est  $H^0 = \frac{B^0}{\mu_0} = 7.958 \cdot 10^5 \text{ A/m}$

Toutefois vous trouverez très souvent le gauss (G) comme unité de  $\mathbf{B}$  et l'oersted (Oe) comme unité de  $\mathbf{H}$ . Ces unités CGS s'avèrent être très pratiques en magnétisme (voir annexe pour détail). Dans ce système d'unité, la permittivité du vide  $\mu_0 = 1$ .

La correspondance gauss-tesla est simple:  $10\,000 \text{ G} = 1T$

Si dans le vide, le champ magnétique  $B^0 = 1 \text{ G}$ , l'excitation magnétique  $H^0 = 1 \text{ Oe}$

#### V-5 Critère de Silsbee

Ne quittons pas le cas simple du barreau infini placé dans un grand solénoïde:

Le champ magnétique extérieur à l'échantillon est  $\mathbf{B}^0$ . Pour une généralisation future, nous appellerons  $\tilde{\mathbf{B}}$  le champ magnétique extérieur tangent à l'échantillon.

A l'intérieur du barreau,  $\mathbf{B}$  est nul sauf dans l'épaisseur de London où il décroît exponentiellement à partir de la surface selon :

$$\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{B}} \exp - (u / \lambda_L)$$

L'excitation magnétique vaut uniformément  $\mathbf{H}^0 = \mathbf{B}^0 / \mu_0$ .

La densité de courant supraconducteur circule sur l'épaisseur de London. Comme le champ magnétique  $\mathbf{B}$ , elle décroît exponentiellement à partir de la surface selon:

$$j = \frac{\tilde{\mathbf{B}}}{\lambda_L \mu_0} \exp - (u / \lambda_L)$$

Le critère de Silsbee de stabilité de la supraconductivité est lié à la densité de courant.

Il stipule que si une partie du matériau est le siège d'une densité de courant  $\mathbf{j}$  supérieure à une densité de courant critique  $J_c$  alors cette partie de matériau transite vers l'état normal.

Nous verrons que cette règle se déduit de la théorie BCS de la supraconductivité.

#### V-6 Mécanisme de la transition d'un barreau supraconducteur

Lorsque le champ magnétique extérieur  $\mathbf{B}^0$  atteint la valeur  $B_c = \lambda_L \mu_0 J_c$ , la densité de courant  $j$  atteint  $J_c$  sur la partie externe de l'échantillon qui devient normale.

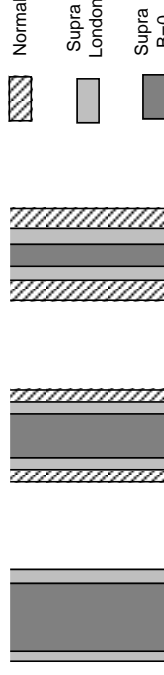


Figure 3 : Transition supraconducteur-normal d'un barreau infini plongé dans un champ magnétique uniforme

(a)  $B^0$  n'a pas atteint  $B_c$  le matériau est supraconducteur avec zone de London. b) ayant atteint  $B_c$ , une gaine externe est passée à l'état normal et (c) le cœur supraconducteur se réduit pour disparaître

Puisque du point de vue de la supraconductivité le matériau normal se comporte comme le vide, le rayon de barreau supraconducteur décroît et la zone de London se déplace vers l'intérieur de l'échantillon.

Les courant supraconducteurs circulent sur des rayons plus petits mais leur valeur sur la partie externe de la nouvelle zone de London est toujours supérieure à  $\frac{B_c}{\lambda_L \mu_0}$ .

Le rayon de barreau à l'état supraconducteur se réduit encore et de proche en proche la supraconductivité disparaît.

Il semble donc équivalent de dire que le matériau passe à l'état normal si:

- la densité de courant dépasse  $J_c$ .

- le champ magnétique  $\tilde{\mathbf{B}}$  sur la surface extérieure de l'échantillon dépasse:

$$\mathbf{B}_c = \mu_0 \lambda_L \mathbf{J}_c.$$

- l'excitation magnétique à l'intérieur de l'échantillon dépasse  $H_c = \lambda_L J_c$ .

Selon Silsbee, le critère fondamental est celui de  $\mathbf{j}$ .

#### V-7 Champ critique dans une plaque mince

Pour illustrer le critère de Silsbee, considérons de nouveau un échantillon sous forme de plaque infinie très mince placée dans un champ uniforme  $\mathbf{B}^0$  ( chapitre II § IV-4). En introduisant  $\tilde{\mathbf{B}}$  qui se trouve ici être égal à  $B^0$ , nous avons

$$j_y(z) = \frac{-\tilde{\mathbf{B}}}{\mu_0 \lambda_L} \frac{\text{sh}\left(\frac{z}{\lambda_L}\right)}{\text{ch}\left(\frac{d}{2\lambda_L}\right)}$$

#### Plaque épaisse

Si la plaque est épaisse, les courants sont localisés sur l'épaisseur de London au voisinage des surfaces situées aux cotes  $-d/2$  et  $d/2$ . avec:

$$\mathbf{j} = \frac{-\tilde{\mathbf{B}}}{\mu_0 \lambda_L} \exp\left(-\frac{z}{\lambda_L}\right)$$

Suivant le scénario décrit pour le fil, la plaque passe à l'état normale lorsque la valeur maximale de  $\mathbf{j}$  soit  $\tilde{\mathbf{B}} / \mu_0 \lambda_L$  atteint  $J_c$ , c'est à dire lorsque le champ magnétique à l'extérieur de la plaque atteint  $B_c$  et que l'excitation magnétique dans la plaque atteint  $H_c$ .

#### Plaque mince

Considérons une plaque mince, c'est à dire d'épaisseur inférieure à l'épaisseur de London  $\lambda_L$ .

Le courant présente un profil modifié par rapport à la plaque épaisse et sa valeur maximale se situe aux surfaces et vaut:

$$\mathbf{j}(z = \pm d/2) = \frac{\tilde{\mathbf{B}}}{\mu_0 \lambda_L} \text{th}\left(\frac{d}{2\lambda_L}\right)$$

Selon le critère de Silsbee, la plaque mince passe à l'état normal lorsque la valeur maximale de  $\mathbf{j}$  dépasse  $J_c$ , c'est à dire lorsque:

$$\frac{\tilde{\mathbf{B}}}{\mu_0 \lambda_L} \text{th}\left(\frac{d}{2\lambda_L}\right) > J_c,$$

C'est à dire aussi en tenant compte de la relation  $B_c = \lambda_L \mu_0 J_c$ :

$$\tilde{\mathbf{B}} > B_c / \text{th}\left(\frac{d}{2\lambda_L}\right)$$

ou en tenant compte dans notre géométrie de  $\mathbf{H} = \mathbf{H}^0 = \frac{\mathbf{B}^0}{\mu_0}$  et  $H_c = \lambda_L J_c$

l'échantillon peut supporter un champ ( dans son sein et non pas seulement extérieur) inférieur à  $H_{c//}^*$  tel que

$$H_{c//}^* = \frac{H_c}{\text{th}\left(\frac{d}{2\lambda_L}\right)}$$

puisque  $\text{th}\left(\frac{d}{2\lambda_L}\right) < 1$ , cela signifie que le champ extérieur peut aller bien au delà de  $B_c$  et l'excitation magnétique bien au delà de  $H_c$  avant qu'il y ait transition vers l'état normal. avec  $d \ll \lambda_L$ :

$$H_{c//}^* = \frac{2\lambda_L}{d} H_c$$

La vérification expérimentale de ce phénomène sur les échantillons dont la taille est égale ou inférieure à la longueur de London justifie la validité de la règle de Silsbee.

## VI Etat intermédiaire

### VI-1 Comportement d'une sphère

Lorsqu'une sphère supraconductrice est placée dans un solénoïde au sein duquel règne au préalable un champ magnétique uniforme  $B^0$ , il apparaît au sommet un champ:

$$\tilde{\mathbf{B}} = \frac{3}{2} B^0$$

et le champ décroît lorsqu'on s'enfonce dans le supraconducteur selon:

$$\mathbf{B}(u) = \tilde{\mathbf{B}} \exp\left(-\frac{u}{\lambda_L}\right)$$

Le champ  $\mathbf{H}$  est uniforme dans toute la sphère:

$$\mathbf{H} = \frac{3}{2} \frac{H^0}{\mu_0} = \frac{3}{2} \frac{B^0}{\mu_0}$$

La densité de courant suit le profil de  $\mathbf{B}$  avec:

$$\mathbf{j} = \frac{\tilde{\mathbf{B}}}{\lambda_L \mu_0} = \frac{3}{2} \frac{B^0}{\lambda_L \mu_0} \quad \text{et} \quad \mathbf{j}(u) = \mathbf{j} \exp\left(-\frac{u}{\lambda_L}\right)$$

La densité de courant est maximale aux pôles ou elle vaut  $\tilde{\mathbf{j}}$ .

C'est donc là, lorsque  $\tilde{j}$  atteint  $J_c$  que le matériau va passer à l'état normal et c'est ce qu'il fait. Les calottes polaires sont les premières à passer à l'état normal. à ce moment là:

$$\tilde{j} = J_c \qquad \tilde{B} = B_c \qquad H_{int} = H_c$$

Le point est que avec la "fonte" des calottes polaires, la matière supraconductrice perd sa forme sphérique. Elle devient ellipsoïdale avec un coefficient de champ démagnétisant N inférieur à 1/3. Pour cet ellipsoïde:

$$\tilde{B} = \frac{B^0}{1-N} \text{ devient inférieur à } \frac{3B^0}{2} \text{ et en conséquence } \tilde{j} \text{ inférieure à } J_c.$$

La valeur de  $B^0 = \frac{2}{3} B_c$  qui avait conduit à la transition de la calotte de la sphère n'est plus suffisante pour faire transiter la calotte de l'ellipsoïde. Il y a stabilisation de la matière supraconductrice. Pour faire transiter la nouvelle calotte, il faut porter  $B^0$  à une valeur supérieure à  $(1-N) B_c$  etc.

La stabilisation s'effectue avec une forme telle que à tout moment:

$$\tilde{j} = J_c \quad (1-N) B_c = B^0 \quad \text{et} \quad H_{int} = H_c$$

Et on peut voir que H reste égal à  $H_c$  tout au long de la transition.

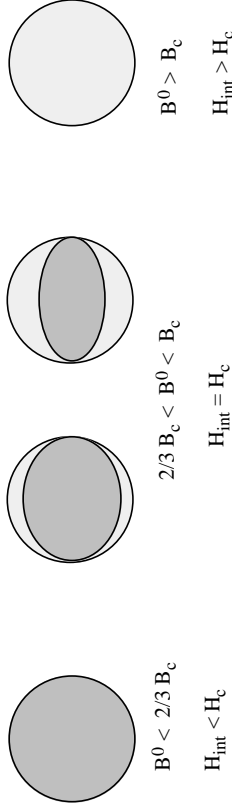


Figure 12 Processus de transition d'une sphère de l'état supraconducteur à l'état normal. La partie gris clair est normale; la partie gris foncé est supraconductrice.

Au fur et à mesure de l'accroissement de  $B^0$ , l'ellipse supraconductrice s'allonge. Sa disparition correspond à  $N = 0$ , c'est à dire à  $B^0 = B_c$ . Ainsi:

$$B^0 < \frac{2}{3} B_c, H_{int} < H_c \text{ la sphère est totalement supraconductrice.}$$

$$\frac{2}{3} B_c < B^0 < B_c, H_{int} = H_c \text{ la sphère est partiellement supraconductrice.}$$

$$B_c < B^0, H_{int} > H_c \text{ la sphère est totalement à l'état normal.}$$

L'état partiellement normal, partiellement supraconducteur est appelé état intermédiaire. Il mérite un traitement plus approfondi.

#### VI-4 Etat intermédiaire de la sphère

L'état intermédiaire est en fait beaucoup plus complexe que la description que nous en avons faite ci-dessus. La répartition des figures ci-dessous [BUC-p.128-129] ou des modèles théoriques tels que le "Branched Model" de Landau [voir KUP-p.8][ROS p. 70-71] analyse l'évolution des grandeurs. (Voir chapitre de J.D. Livingston et W. Desorbo [PAR-p.1235] où la théorie et de magnifiques photos sont présentées )

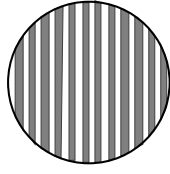


Figure 18

Configuration plus réaliste de sphère dans l'état intermédiaire

Si l'état intermédiaire est dicté par  $H = H_c$  en chaque point de l'échantillon, sa structure fine résulte de la compétition entre deux termes énergétiques que nous n'avons pas encore introduits:

- l'énergie de surface positive ( pour les supraconducteurs de type-I qu'implicitement nous traitons ici) entre la phase normale et la phase supraconductrice.
- l'énergie du champ magnétique à l'extérieur de la sphère qui se trouve profondément modifié.

Typiquement, un mélange de phase grossier diminue l'interface et donc l'énergie qui lui est associée, mais il provoque une perturbation forte du champ extérieur et augmente fortement son énergie.

A l'inverse, un mélange de phase fine augmente l'interface et l'énergie qui lui est associée, mais il conduit à une perturbation moindre du champ magnétique extérieur qui augmente peu son énergie.

Le minimum de la somme de ces deux termes énergétiques dictera la configuration du mélange entre les phases. Le calcul est en général compliqué à mener en raison de la difficulté de calcul de la perturbation du champ magnétique extérieur et requiert du calcul numérique.

Nous le présentons au paragraphe suivant dans le cas géométrique simple d'une plaque mince où des approximations raisonnables peuvent être effectuées.

Il est très important enfin de noter que dans l'état intermédiaire, piloté par des effets de champ démagnétisant, le mélange de supraconducteur et d'état normal est grossier. (millimétrique)

Cet état ne devra en aucun cas être confondu avec l'état de mélange des supraconducteurs de type II avec l'apparition de "vortex" qui sont de taille submicronique.

Nous verrons plus loin qu'il y a deux catégories de supraconducteurs: les supraconducteurs de type I et les supraconducteurs de type II. La différence entre ces deux types de supraconductivité trouve son origine dans la différence de signe des énergies de surface normal/supraconducteur. Pour les supraconducteurs de type I elle est positive alors que pour les supraconducteurs de type II elle est négative.

Nous parlons ici de supraconducteurs de type I dont l'énergie de surface est positive.

### VII Structure de l'état intermédiaire d'une plaque mince

#### VII-1 Modèle laminaire de plaque mince dans l'état intermédiaire

Nous examinons maintenant la transition d'une plaque infinie soumise à un champ magnétique perpendiculaire à son plan.

L'effet d'amplification du champ extérieur que nous avons vu avec la sphère devient extrême en raison du coefficient  $N = 1 - \left(\frac{B^0}{1-N}\right)$ .

La plaque est donc immédiatement dans l'état intermédiaire et est traversée par le champ magnétique à travers les zones qui sont devenues normales.

Le modèle communément admis est celui représenté à la figure 19. C'est un modèle de plaque laminaire dans laquelle les zones normales de largeur  $D_n$  s'alternent avec les zones supraconductrices de largeur  $D_s$  en formant une structure périodique de largeur  $D$ . On appelle  $L$  la largeur (perpendiculaire au plan de la figure) de la plaque.

Les fractions  $\rho_n$  et  $\rho_s$  de matière normale et supraconductrice satisfont aux équations:

$$D_n = \rho_n D \quad \text{et} \quad D_s = \rho_s D$$

La plaque baignée dans un champ magnétique  $B^0$  provoque de part et d'autre de sa surface (elle est considérée comme infiniment mince) une perturbation d'extension  $D_p$  que l'on peut schématiser comme à la figure 19-c en disant que sur cette épaisseur le champ magnétique se concentre au niveau des bandes normales. Les bons auteurs nous disent que

l'extension de la zone perturbée est plus petite que la largeur de chacune des bandes  $D_n$  et  $D_s$  et qu'elle peut s'écrire en première approximation:

$$\frac{L}{D_p} = \frac{L}{D_s} + \frac{L}{D_n}$$

Au vu du paragraphe précédent, le champ dans la plaque est égal au champ critique  $H_c$ . Dans les zones normales de la plaque assimilables à du vide, le champ  $B$  est égal à  $\mu_0 H_c$ .

On peut dès à présent écrire la conservation du flux du champ magnétique qui attaque la plaque:

$$L D B^0 = L D_n B_c$$

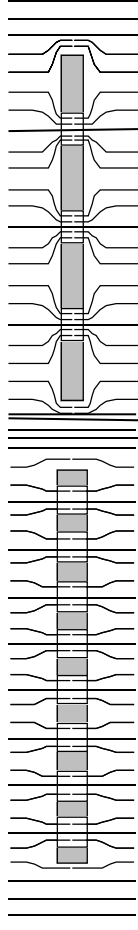
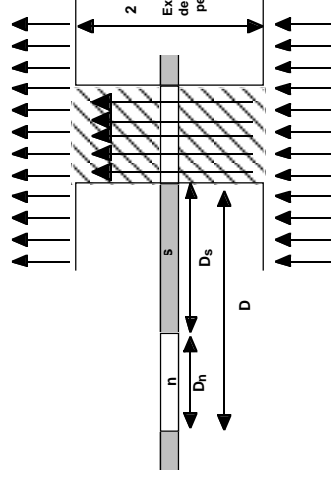


Figure 19: Modèle d'état intermédiaire d'une plaque mince.

- $D$  périodicité de la structure
  - $D_n$  largeur des bandes normales
  - $D_s$  largeur des bandes supraconductrices
  - $D_p$  extension de la zone de champ magnétique perturbé
- $$\frac{L}{D_p} = \frac{L}{D_s} + \frac{L}{D_n}$$



#### V-2 Contributions énergétiques

##### Energie magnétique

Nous comparons l'énergie magnétique de la zone perturbée avec et sans plaque sur une longueur  $D$ . Il vient sans difficulté:

Energie sans plaque: la zone n'est pas perturbée et le champ est uniformément  $B^0$

$$\left(\frac{B^0}{2 \mu_0}\right) D D_p L$$

Energie avec plaque dans l'état intermédiaire:

Le champ magnétique B se concentre dans les zones normales où il prend la valeur  $B_c = \mu_0 H_c$

$$\left(\frac{B_c^2}{2 \mu_0}\right) D_n D_p L$$

Le gain d'énergie magnétique est donc:

$$E_m = \left(\frac{B_c^2}{2 \mu_0}\right) D_n D_p L - \left(\frac{B^2}{2 \mu_0}\right) D D_p L$$

#### Energie de surface

Pour une longueur D, il y a deux surfaces de longueur L, soit une énergie de surface:

$$E_s = 2 L \gamma$$

#### V-3 Structure résultante (POO-p.355)

La minimisation de la somme des énergies et les relations entre les différents paramètres conduit à: (à vérifier)

$$D = \frac{D_s D_n B_c}{\sqrt{2} \mu_0 \gamma} \quad \frac{D_s D_n}{D^2} = \frac{B^0 (B_c - B^0)}{B_c^2}$$

$$D = \frac{\sqrt{2} \mu_0 \gamma}{B^0 (B_c - B^0)}$$

Et donc à la connaissance du pas de la structure et le fraction de chacune des phases.

### VIII Intensité de courant critique

#### VIII-1 Fait expérimental

Une troisième grandeur vient, lorsqu'il dépasse une valeur critique, détruire la supraconductivité: c'est le courant.

Lorsque le courant passant dans un fil atteint une valeur critique  $I_c$ , la supraconductivité disparaît. La résistance R passe subitement de la valeur 0 à une valeur non nulle.

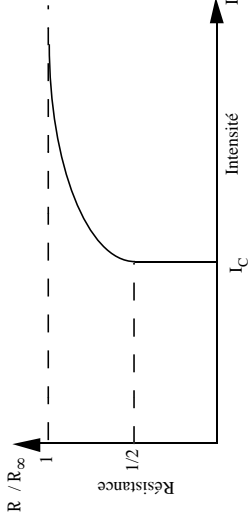


Figure 20

Variation de la résistance d'un fil en fonction de l'intensité de courant qui le traverse.

Si on appelle  $R_\infty$  la résistance du fil dans l'état normal, la résistance passe subitement à  $I_c$  de  $R=0$  à une valeur proche  $R = R_\infty/2$ . Elle croît ensuite progressivement pour atteindre  $R_\infty$  lorsque I vaut plusieurs fois  $I_c$ .

Qui dit courant dans un fil dit aussi champ magnétique à l'intérieur de ce fil. Nous verrons par la suite que l'intensité critique  $I_c$  et le champ critique  $H_c$  ne sont pas des grandeurs indépendantes.

#### V-2 Instabilité des états normaux et supraconducteurs

Reprenons le fil de rayon R parcouru par un courant I (chap II § VII). La densité de courant n'est pas uniforme. Elle est localisée sur l'épaisseur de London selon:

$$j_z(r) = \frac{I}{2\pi R \lambda_L} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_L}\right)$$

Soit avec une densité de courant maximale au voisinage de la surface:

$$j_{\max} = \frac{I}{2\pi R \lambda_L}$$

La partie externe du fil passe à l'état normal lorsque la densité de courant maximale dépasse  $J_c$ . Cela se produit lorsque le courant atteint une intensité critique:

$$I_c = 2\pi R \lambda_L J_c$$

Imaginons que la partie de métal située entre R et R' passe à l'état normal. Le rayon de fil supraconducteur est R' et vu la résistance nulle du supraconducteur, tout le courant va passer à l'intérieur de ce rayon avec un courant maximal:

$$j_{\max} = \frac{I}{2\pi R' \lambda_L}$$

Inférieur au courant maximal qui avait initié la transition vers l'état normal. Cela précipite la transition en faisant tendre R' vers 0.

Lorsque le fil est devenu complètement normal, la densité de courant se répartit uniformément dans le fil avec une densité de courant:

$$j_{\text{normal}} = \frac{I}{\pi R^2} \ll J_c$$

très inférieure à la densité de courant critique.

Il n'y a plus aucune raison pour que le fil reste à l'état normal et il revient à l'état supraconducteur.

Mais, à l'état supraconducteur, la répartition de courant fait apparaître une densité de courant de surface supérieure à  $J_c$  et le fil repasse à l'état normal etc.

Ni l'état normal ni l'état supraconducteur ne sont stables.

### V-3 Modèle de fil à coeur dans l'état intermédiaire

Tant que  $I$  est inférieur au courant critique  $I_c = 2\pi R \lambda_L J_c$ , le fil est totalement à l'état normal.

Lorsque  $I$  dépasse  $I_c$ , le fil ne peut être ni à l'état normal, ni à l'état supraconducteur et un modèle simple d'équilibre a été imaginé:

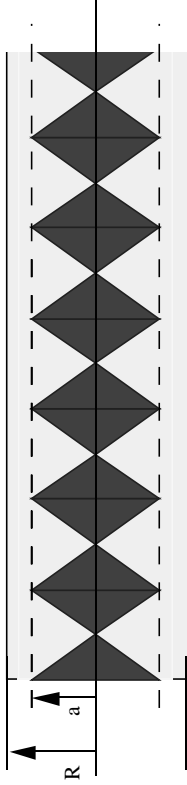


Figure 2L: modélisation de l'état intermédiaire présenté par un fil parcouru par un courant.

Le fil est de rayon  $R$

La gaine comprise entre la surface extérieure et une surface de rayon  $a$  est totalement à l'état normal. On affectera les grandeurs relatives à cette zone de l'indice (1).

Le coeur de rayon  $a$  est dans l'état intermédiaire, c'est-à-dire qu'il est constitué d'un mélange grossier de matériau normal et de matériau supraconducteur. Ce mélange est tel que, en son sein, l'excitation magnétique est égale à l'excitation critique  $H=H_c$ . Ce sera la zone (2).

Dans la gaine, la densité de courant est  $j_1$ . Elle est liée au champ électrique  $E$  qui y règne par:  $j_1 = \sigma E$  où  $\sigma$  est la conductivité électrique. Cela représente une intensité de courant:

$$I_1 = j_1 \pi (R^2 - a^2)$$

Dans le coeur, l'excitation magnétique  $H$  est de norme constante  $H_c$ . Vu que le courant se déplace dans la direction de l'axe du fil, le vecteur  $H$  est tangentiel et n'a qu'une composante  $H_\theta = H_c$ . Il est lié aux courants envoyés par l'expérimentateur par:  $\text{rot } H = j_2$ .

Compte tenu de l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques, la densité de courant est inversement proportionnelle à  $r$  et vaut:

$$j_2(r) = \frac{H_c}{r}$$

L'intensité de courant porté par le coeur est:

$$I_2 = \int_0^a \frac{H_c}{r} 2\pi r dr = 2\pi H_c a$$

En  $r = a$ , les densités de courant des deux zones doivent être égales, soit:

$$j_2(a) = \frac{H_c}{a} = j_1 = \sigma E$$

Ce qui relie le champ électrique  $E$  au champ critique  $H$  selon:

$$E = \frac{H_c}{\sigma a}$$

L'intensité totale  $I = I_1 + I_2$  s'écrit:

$$I = \pi R H_c \left( \frac{R}{a} + \frac{a}{R} \right)$$

Le courant critique  $I_c$  de début de déstabilisation du fil correspond à  $a = R$ , soit:

$$I_c = 2\pi R H_c$$

(cela peut se retrouver avec le théorème d'Ampère) soit aussi en utilisant les trois équations ci-dessus:

$$I = \frac{I_c}{2} \left( \frac{\alpha E}{I_c} + \frac{I_c}{\alpha E} \right) \quad \text{avec} \quad \alpha = 2\pi R^2 \sigma$$

Le courant  $I$  étant donné, le champ  $E$  est solution de:

$$\alpha^2 E^2 - 2 I \alpha E + I_c^2 = 0$$

dont la solution est:

$$E = \frac{I}{\alpha} \left[ 1 \pm \left( 1 - \left( \frac{I_c}{I} \right)^2 \right)^{1/2} \right]$$

Pour un courant  $I$  tendant vers l'infini, on retrouve:

$$I = \pi R^2 \sigma E$$

et donc une résistance de fil :

$$R(\infty) = \frac{I}{\pi R^2 \sigma}$$

et une résistance apparente:

$$\frac{R_c}{R_c(\infty)} = \begin{cases} 0 & \text{si } I < I_c \\ \frac{1}{2} \left[ 1 + \left( 1 - \left( \frac{I_c}{I} \right)^2 \right)^{1/2} \right] & \text{si } I > I_c \end{cases}$$

ce qui est tout à fait en accord avec la figure 20

V-4 réduction du courant critique dans les fils très minces

[ROS-p.108] C'est le pendant sur le courant critique de ce que nous avons vu sur le champ critique au § V-7 de ce chapitre.

V-5 Courants critiques dans un fil soumis à un champ magnétique[ROS p 84]

*Champ le long du fil*  
*Champ perpendiculaire au fil*

**VI Explication du phénomène de lévitation**

En présence d'un champ magnétique extérieur non nécessairement uniforme  $\mathbf{B}^0$ , le matériau supraconducteur elliptique acquiert une densité d'aimantation  $\mathbf{I} = -\frac{\mathbf{B}^0}{\mu_0 (1-N)}$  et une aimantation totale  $\mathbf{M} = \mathbf{VI}$ .

L'énergie d'un aimant dans un champ magnétique  $\mathbf{B}^0$  s'écrit:

$$E = -\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}^0$$

soit, vu la valeur de  $\mathbf{M}$ :

$$E = \frac{V(\mathbf{B}^0)^2}{\mu_0 (1-N)}$$

L'énergie est minimale si le supraconducteur se place dans une zone de moindre champ magnétique, c'est à dire loin de l'aimant extérieur et dans un endroit de faible champ. C'est bien ce que nous avons vu à la figure du §V-1 chap.I.