

CHAPITRE V

Les supraconducteurs de type II

I Deux types de comportements magnétiques

I-1 Emergence des supraconducteurs de type II

L'existence de deux types de supraconducteurs s'est fait jour lentement.

Les premiers signes de supraconductivité de type II datent des années 1930 avec la détection d'anomalies de comportement magnétique dans les alliages supraconducteurs. A cette époque, le groupe d'Oxford conduit par Mendelssohn [SIM-p.77] met en évidence un effet Meissner incomplet dans les alliages. De Haas et Voogd à Leiden observent de forts champs critiques dans les alliages SnBi: 2 teslas au lieu des quelques dixièmes de tesla observés dans les métaux purs [BUC-p.135]. Les effets sont expliqués en terme d'impuretés qui viennent perturber le comportement standard et se comportent plutôt en parasites.

En fait la reconnaissance d'un deuxième type de supraconductivité dut attendre 1957 avec une très fameuse publication d'Abrikosov. Dans ce papier, Abrikosov montre à partir des équations de Ginzburg-Landau publiées en 1950 que deux comportements de supraconducteurs sont attendus [ROS-p.183]. Le travail théorique fut scellé par Gorkov [BUC-p.135] en 1959 qui établit la relation entre les équations G-L et la théorie microscopique BCS.

Ce sont donc 4 théoriciens, Ginzburg, Landau, Abrikosov et Gorkov qui ont montré l'existence des supraconducteurs de type II et ont donné leur nom (GLAG) à la théorie qui permet de décrire leur comportement. Les équations de Ginzburg-Landau présentent néanmoins un inconvénient majeur: elles sont difficiles à bien saisir et non moins difficiles à manipuler. Nous leur consacrerons un chapitre.

Pour une première approche des supraconducteurs de type II, nous en resterons à une présentation plus visuelle.

I-2 Comportements magnétiques des deux types de supraconducteurs

Les deux types de supraconducteurs se distinguent par leur réponse à un champ magnétique extérieur.

Supraconducteurs de type I

La réponse d'un supraconducteur de type I est représentée à la figure I-a.

De $H=0$ à H_c , l'excitation magnétique critique, la densité d'aimantation \mathbf{I} est égale à $-\mathbf{H}$ et la susceptibilité magnétique $\chi = -1$. Le supraconducteur se comporte en diamagnétique parfait et le champ magnétique à l'intérieur du supraconducteur égal à $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{I})$ est nul.

Au delà de H_c , le matériau est dans l'état normal et l'aimantation est pratiquement nulle.

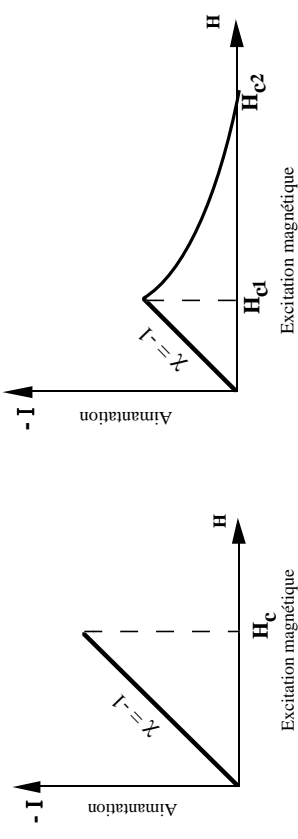


Figure 1. Dépendance de l'aimantation avec l'excitation magnétique pour les deux types de supraconducteurs

supraconducteur de type II

La réponse d'un supraconducteur de type II est sensiblement différente. Elle est représentée à la figure 1-b

- de $H=0$ à une excitation critique H_{c1} (appelée aussi champ critique inférieur), l'aimantation est égale à $-\mathbf{H}$. Comme dans les supraconducteurs de type I, le matériau se comporte en diamagnétique parfait : il y a effet Meissner total.
- à partir de H_{c1} , l'aimantation décroît progressivement pour atteindre $\mathbf{I}=0$ à une excitation critique H_{c2} , appelée champ critique supérieur. Dans l'intervalle compris entre H_{c1} et H_{c2} , l'effet Meissner est seulement partiel.

-au delà de H_{c2} la susceptibilité magnétique est nulle et le matériau est dans l'état normal

On verra plus tard que si le matériau massif redevient normal au champ H_{c2} , il n'en est pas de même de sa surface qui continue à manifester des signes de supraconductivité jusqu'à un nouveau champ magnétique critique appelé H_{c3} .

I-3 Diagramme des phases des deux types de supraconducteur

Comme nous l'avons entrevu dans l'introduction, ces comportements conduisent à deux diagrammes de phases différents.

Le supraconducteur de type I ne fait apparaître que la phase de diamagnétisme parfait appelée aussi phase Meissner.

Le supraconducteur de type II présente un diagramme de phase plus riche avec une phase Meissner en dessous de H_{c1} , une phase dite de mélange ou de Shubnikov entre H_{c1} et H_{c2} et la phase normale au-dessus de H_{c2} .

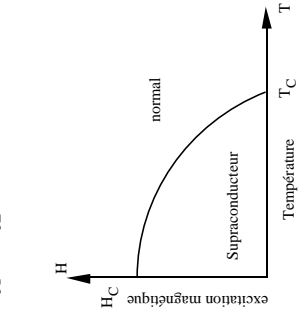


figure 2.a: Diagramme de phase d'un supraconducteur de type I

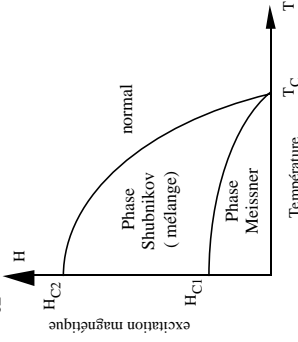


figure 2.a: Diagramme de phase d'un supraconducteur de type II

Les diagrammes des phases indiquent comment les champs critiques varient avec la température.

I-4 Répartition des matériaux.

A quelques exceptions près:

- les métaux purs supraconducteurs sont de type I (sauf Nb et V)
- les alliages, les composés organiques ou les oxydes supraconducteurs sont de type II.

Les valeurs de H_c des métaux purs ont été données au tableau du chapitre IV.

Elles n'excèdent pas 2000 Oe.

Quelques valeurs H_{c1} et H_{c2} sont données au tableau ci-dessous.

Matériau	Nb (fil)	NbTi	Nb ₃ Sn	LaMo ₆ S ₈	Rb ₃ C ₆₀	YBaCuO
T_c (K)	9,3	9,5	18,2	11	29,6	92
$\mu_0 H_{c1}$ (T)	0,181		0,035		0,012	
$\mu_0 H_{c2}$ (T)	2	13	23	44,5	57	120-200

Tableau I Valeurs d'excitations critiques inférieures et supérieures pour quelques supraconducteurs de type II [POO-p.272] [POO-p.338]

On notera les très fortes valeurs que peut atteindre H_{c2} . Il est de grand intérêt technologique puisqu'il représente le champ maximal que peut supporter le supraconducteur sans revenir à l'état normal.

Reste à savoir à quel champ correspond la perte de conductivité infinie.

II Energie de surface des supraconducteurs de type I

II-1 Enthalpie libre dans l'état supraconducteur

Au chapitre IV § IV -2, nous avons déterminé la variation de l'enthalpie libre de la phase supraconductrice en fonction du champ à température constante. Nous avons pour cela utilisé l'équation d'état $I = -H$, ce qui a donné après intégration:

$$g_s(H) = g_n(0) - \frac{\mu_0 H_c^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2}$$

II-3 schéma spatial de l'évolution du profil d'enthalpie libre (en volume)

Sous champ nul, le profil de l'enthalpie libre est celui de la figure 3. La phase supraconductrice a acquis une enthalpie libre volumique inférieure à celle de la phase normale de $\frac{\mu_0 H_c^2}{2}$.

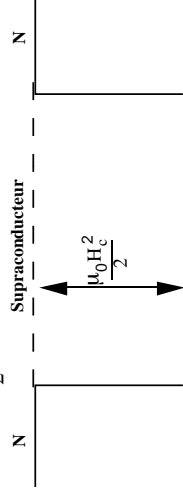


Figure 3

Profil de l'enthalpie volumique de condensation

Nous l'avons appelée enthalpie libre de condensation et l'avons attribuée à l'appariement des électrons sous forme de paires de Cooper.

En présence d'un champ magnétique, l'enthalpie libre volumique du supraconducteur est rehaussée de $\frac{\mu_0 H^2}{2}$ pour ne plus présenter avec la phase normale qu'un déficit d'enthalpie libre $g_s(H) = \frac{\mu_0 H_c^2}{2} - \frac{\mu_0 H^2}{2}$.

L'accroissement $\frac{\mu_0 H^2}{2}$ est dû à l'aimantation du matériau supraconducteur.

Un tel schéma fait parfaitement apparaître que H_c est l'excitation critique puisque si H atteint ou dépasse H_c , $g_s(H)$ devient nul puis positif, ce qui déstabilise l'état supraconducteur.

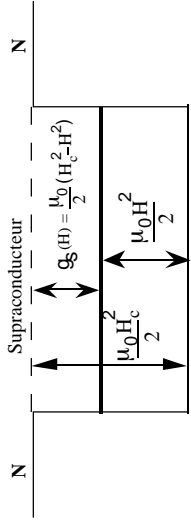


Figure 4

Profil de l'enthalpie volumique en présence de champ magnétique, sans tenir compte de l'épaisseur de London

II-3 Enthalpie au voisinage de la surface

En fait, dans le calcul précédent, nous avons totalement éludé l'épaisseur de London dans laquelle l'équation d'état n'est pas simplement $I = -H$.

Dans cette épaisseur, le champ magnétique n'est pas nul et s'écrit:

$$\mathbf{B}(u) = \mathbf{B}^0 \exp\left(-\frac{u}{\lambda_L}\right)$$

et l'aimantation, définie par:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{B} - \mathbf{H}}{\mu_0}$$

prend la forme (ceci est vrai car dans le matériau \mathbf{H} étant toujours égal à \mathbf{H}^0):

$$\mathbf{I}(u) = \mathbf{H} \left[\exp\left(-\frac{u}{\lambda_L}\right) - 1 \right]$$

L'intégration à température constante de la différentielle de l'enthalpie libre:

$$dg = -s dT - \mu_0 \mathbf{I} d\mathbf{H}$$

conduit alors la densité d'énergie libre locale:

$$g_s(\mathbf{H}) = g_n(0) - \frac{\mu_0 H_c^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2} \left[\exp\left(-\frac{u}{\lambda_L}\right) - 1 \right]$$

qui, si elle reste uniforme au coeur du matériau au-delà de λ_L , varie fortement au voisinage de la surface, à tel point qu'en surface, le second terme du deuxième membre disparaît et l'enthalpie libre se réduit à l'enthalpie libre de condensation.

II-3 Enthalpie libre de surface négative

Avec la prise en compte de la zone de London, l'aimantation passe de 0 à $-\mathbf{H}$ sur une distance de l'ordre de grandeur de λ_L , l'enthalpie libre d'origine magnétique; ne conduit plus à un accroissement uniforme de l'enthalpie libre totale. Le profil devient celui de la figure 5 avec une dépression au voisinage des surfaces.

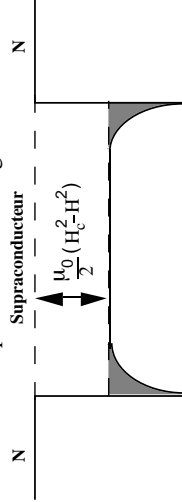


Figure 5

Profil de l'enthalpie libre volumique totale

La partie grisée de la figure 5 apparaît comme une enthalpie libre de surface négative.

III Première approche des vortex

III-1 Energie de surface négative

La notion d'enthalpie de surface est chère à quiconque s'intéresse aux phénomènes de germination, de précipitation, de miscibilité, etc.

Prenons deux liquides A et B, chacun avec son enthalpie libre volumique. A priori séparer les liquides en deux amas ou disperser l'un (par exemple A) en fine gouttelettes dans le second (B) est égal puisque ces deux situations correspondent à la même enthalpie libre totale, les volumes de chacun des liquides étant inchangés.

C'est sans tenir compte des effets de surface. En effet pour des raisons de liaison chimique, les atomes du liquide A peuvent préférer avoir des voisins de type B plutôt que de type A. En thermodynamique, cette préférence s'exprime par un abaissement d'enthalpie libre des atomes de A en contact avec les atomes B et plus précisément par une enthalpie de surface négative. Il n'est plus alors égal d'avoir un amas de A ou de fines gouttelettes de A. La seconde situation est plus favorable puisque la surface qui sépare les deux phases est dans ce cas beaucoup plus importante.

A l'inverse, une enthalpie de surface positive conduit à la séparation en deux amas partageant une interface aussi faible que possible.

III-2 Vortex et phase de Shubnikov

On appelle vortex un filament de phase normale dans une phase supraconductrice.

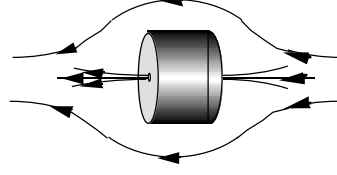


Figure 6

Le champ magnétique traverse le supraconducteur en suivant une ligne de vortex

Le vortex apparaît sous l'effet d'un champ extérieur. Il offre au champ magnétique un canal par lequel il peut traverser l'échantillon sans le contourner. Avec l'apparition d'un

vortex, le matériau quitte la phase de Meissner. C'est le début de la phase de Shubnikov qui prend son sens avec la multiplication des vortex.

- H_{c1} correspond à l'apparition du premier vortex.
- H_{c2} les vortex ont envahi le matériau qui devient totalement normal.

III-3 Pourquoi vortex?

La zone de London est à la fois zone de pénétration du champ et zone de circulation des supercourants dont le rôle est d'écranter le champ magnétique dans le coeur du supraconducteur.

Lorsque, sous l'effet d'un champ magnétique extérieur, un cylindre supraconducteur laisse place à un filament normal, deux boucles de supercourants sont observées:

- la boucle de courant habituelle qui circule sur la surface extérieure du cylindre
 - une boucle de courant localisée autour du filament normal.
- Les sens de circulations des supercourants sont opposés et de telle sorte que chacun d'eux génère un champ magnétique dans une direction opposée.

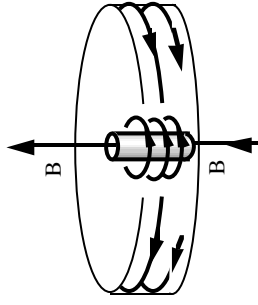


Figure 8
Boucle de courant "entourant" un vortex

La boucle de courant extérieure écranter B^0 à l'intérieur du supraconducteur. La boucle de courant autour du filament normal rétablit le champ qui traverse ce dernier. Le tourbillon de courant électrique associé au filament normal constitue un vortex. Vortex signifie tourbillon en anglais.

La stabilité d'un vortex peut facilement être comprise à partir de la figure 7. La partie de phase normale centrale N est entourée de supraconducteur S. Le supraconducteur est limité par le vide.

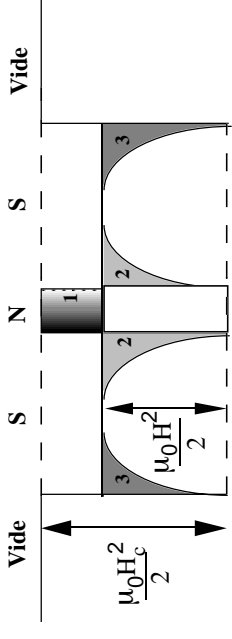


Figure 7

Profil d'enthalpie libre en présence d'un vortex

III-3 Première évaluation de la stabilité d'un filament normal

Sur le diagramme enthalpique, on reconnaît:

- l'enthalpie libre de condensation $\frac{\mu_0 H_c^2}{2}$ qui affecte l'ensemble du supraconducteur mais bien sûr n'apparaît pas dans le vide et ni dans le filament normal.
- l'enthalpie libre $\frac{\mu_0 H^2}{2}$ du diamagnétique parfait au delà de l'épaisseur de London.
- le déficit d'enthalpie libre de surface extérieure (zones 3) en gris foncé.
- le filament normal dans lequel l'enthalpie libre retrouve la valeur du vide.
- La zone de London autour du filament normal et le déficit d'enthalpie libre associé à tout interface surface N/S. (zone 2)

La présence du vortex fait passer le profil d'enthalpie libre de la figure 5 à celui de la figure 7. On note lors de ce passage deux modifications:

- une augmentation d'enthalpie libre ΔG_{fn} localisée dans le filament normal: partie (1)
- une réduction d'enthalpie libre de surface $\Delta G_o = \Delta G_m$ d'origine magnétique localisée dans la zone de London entourant le filament normal.

Le vortex est stable si la variation totale d'enthalpie libre $\Delta G_{fn} + \Delta G_m$ est négative.

Si r est le rayon du filament normal, il vient:

$$\Delta G_{fn} = \pi r^2 \left(\frac{\mu_0 H_c^2}{2} - \frac{\mu_0 H^2}{2} \right)$$

et:

$$\Delta G_m = -\pi \left[(r+\lambda)^2 - r^2 \right] \frac{\mu_0 H^2}{2}$$

Le filament sera stable pour:

$$H > \frac{r}{r+\lambda} H_c$$

III-4 Eviter les confusions

L'alternance de bandes normales et supraconductrices vues dans les parties IV et V du chapitre II pourrait inciter à effectuer un rapprochement avec les vortex.

Il n'en est rien. Les deux phénomènes sont totalement différents dans leur échelle et les mécanismes. Pour éviter les confusions, ils sont nommés avec des vocables différents et on parlera d'état intermédiaire et d'état de mélange ou phase de Shubnikov.

Etat intermédiaire

Dans l'état intermédiaire vu au chapitre III, le mélange de phase normale et supraconductrice est piloté par la nécessité de garder tout au long de la transformation supraconducteur-normal un champ critique H_c . Les phases normales et supraconductrices s'organisent de telle sorte que le champ démagnétisant vienne se déduire du champ extérieur et maintenir $H=H_c$ en tout point de l'échantillon.

La structure est grossière (coarse) et les domaines sont plutôt de l'ordre du millimètre. L'énergie de surface ne joue aucun rôle.

Etat de mélange - ou phase de shubnikov.

En phase de shubnikov, les vortex apparaissent pour faire le maximum d'interface normal-supraconducteur et abaisser l'enthalpie libre de l'ensemble de l'échantillon.

Le mélange est très fin, et les vortex ont un rayon qui n'excède pas 1000\AA . En anticipant un peu, leur diamètre est de l'ordre de grandeur de la longueur de London.

III-5 H_{c1} et la question des supraconducteurs de type I

Les valeurs de r et λ étant données, l'expression de H_{c1} que nous avons trouvée en fonction de H_c , r et λ , indiquerait qu'il existe un champ H_{c1} inférieur à H_c pour lequel, en raison de l'énergie d'interface N/S négative, un vortex est stable. Selon cette relation, H_{c1} est d'autant plus faible que r est petit devant λ , et si, à la limite, r était 0 (une simple colonne d'atome) H_{c1} tendrait vers 0 et on sait que certains supraconducteurs présentent un champ H_{c1} très faible.

Il apparaît aussi que les valeurs relatives de r et λ sont des paramètres essentiels et que λ étant connu, H_{c1} est déterminé par r . Un problème important est celui de la valeur du rayon r .

Reste que ce modèle s'il permet de prévoir l'existence de supraconducteur au sein desquels apparaissent des vortex en-deçà de H_c , ne permet pas de comprendre d'existence de supraconducteurs dans lesquels la supraconductivité disparaîtrait uniformément à H_c sans apparition de vortex.

La question initiale est renversée. Il ne s'agit plus de se demander pourquoi il existe des supraconducteurs de type II, mais pourquoi tous les supraconducteurs ne sont pas de type II et pourquoi il existe des supraconducteurs de type I?

Comment justifier leur stabilité?

III-6 Complexité des vortex

Nous verrons que nous pourrions comprendre l'ensemble des phénomènes en passant par une description plus élaborée des vortex avec essentiellement 2 points:

i) Il y a bien une zone " normale " et un domaine de London, mais ses zones se mélangent et on dira plutôt qu'à partir du point central du vortex la normalité s'étend sur une longueur caractéristique ξ appelée longueur de cohérence et l'amortissement du champ s'effectue sur λ .

ii) Le flux du champ magnétique qui traverse un vortex prend une valeur ϕ_0 bien déterminée qui va contraindre le profil du champ magnétique dans le vortex.

Cela fera l'objet d'un développement simplifié dans la suite de ce chapitre et d'une description beaucoup plus complète dans les chapitres consacrés à la théorie de Ginzburg-Landau et à la dynamique des vortex.

V Longueur de cohérence

V-1 Nécessité d'une énergie de surface positive

Si on reprend l'exemple des gouttes de liquide, la stabilité des supraconducteurs de type I serait liée à l'apparition d'une enthalpie libre de surface positive.

Reste à savoir où aller chercher une contribution positive qui viendrait contrebalancer l'effet négatif du défaut d'aimantation sur l'épaisseur de London.

V-3 Longueur de Cohérence

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction à ce chapitre, l'idée d'énergie de surface positive provient des calculs d'Abrikosov sur le modèle Ginzburg-Landau.

Le concept fondamental est celui ci:

le passage de l'état normal (le vide est assimilé à l'état normal) à l'état supraconducteur ne peut pas être abrupt. Une zone de transition sépare l'état normal de l'état supraconducteur parfait.

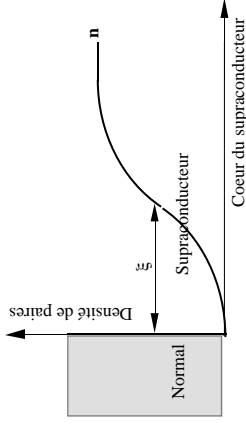


Figure 9

Profil de densité de paires supraconductrices au voisinage d'une surface

Si on caractérise chacune des phases par la densité d'électrons "supraconducteurs" dont on sait qu'ils se groupent en paires de Cooper, on peut définir:

- Etat normal: zone dans laquelle la densité de paires de Cooper est nulle.
- Etat supraconducteur parfait: domaine dans lequel la densité de paires de Cooper est uniformément n .

Il paraît alors concevable qu'il existe entre les deux phases une zone de transition dans laquelle le nombre de paires supraconductrices croît progressivement de 0 à n

Cette zone s'étend sur une longueur caractéristique ξ appelée longueur de cohérence.

C'est avec l'épaisseur de London λ_L la deuxième longueur caractéristique de la supraconductivité.

V-4 Aperçu des paires de Cooper

Depuis le début du cours nous avons évoqué le concept de paire de Cooper, association de deux électrons qui leur confère la propriété de supraconductivité.

Nous voudrions à propos de la longueur de cohérence dissiper un malentendu et lever le voile sur la signification microscopique de l'appariement d'électrons.

Le malentendu concerne l'aspect spatial des paires de Cooper. Il ne faut pas voir les paires de Cooper comme deux électrons proches l'un de l'autre et se déplaçant "bras dessus, bras dessous" à travers le matériau. Les électrons d'une même paire peuvent certes être proches (quelques Å) mais ils peuvent être aussi très très distants: jusqu'à $1\mu\text{m}$ (10 000Å).

Dans ce dernier cas, des milliers de paires s'enchevêtrent et pourtant chaque paire est reconnue par sa charge (2 fois la charge de l'électron) et sa masse (2 fois la

masse de l'électron). La localisation d'une paire devient un problème délicat et tout au plus peut on parler des centres de gravité de paires de Cooper.

Microscopiquement, les électrons communiquent à grande distance par l'intermédiaire des phonons, c'est-à-dire au travers des ondes de vibration atomique.

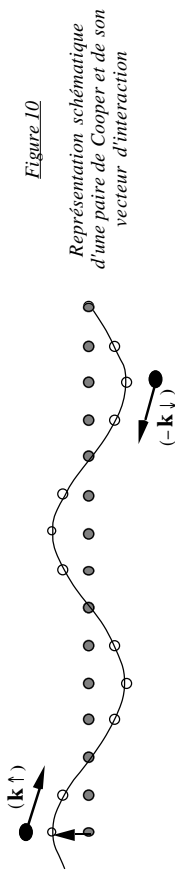


Figure 10

Représentation schématisée d'une paire de Cooper et de son vecteur d'interaction

Considérons une chaîne atomique au repos: la chaîne linéaire de cercles grisés.

Les cercles noirs (1) et (2) sont deux électrons relativement lointains. Une première idée du mécanisme d'interaction entre les deux électrons via une vibration de réseau peut être schématisée ainsi:

- i) l'électron (1) attire un atome (A) qui se déplace comme indiqué par la flèche.
- ii) l'atome déplacé entraîne son voisin et, de proche en proche, les atomes de la chaîne s'écartent de leur position d'équilibre pour décrire une onde sinusoïdale de déplacement que l'on appelle phonon.
- iii) l'atome B de la chaîne interagit avec l'électron (2).

Ces deux électrons qui se "connaissent" via la vibration de réseau forment une paire de Cooper.

Le phonon apparaît comme vecteur de l'interaction entre les deux électrons. On montre néanmoins que l'interaction est significative uniquement lorsque les électrons (1) et (2) sont de vecteurs d'onde \mathbf{k} et de spins opposés. Aussi, un électron ($\mathbf{k} \uparrow$) s'apparie avec un électron ($-\mathbf{k} \downarrow$).

Avec un tel mécanisme, les électrons d'une paire peuvent être relativement distants et la longueur de cohérence ξ est grosso modo la distance moyenne entre deux électrons d'une même paire.

Les électrons d'une même paire se déplacent à grande vitesse (la vitesse de Fermi $v_F \approx 10^6 \text{m/s}$) dans des directions opposées (ils possèdent des vecteurs d'onde opposés). S'il y a déplacement de la paire de Cooper, c'est que son centre de gravité se déplace, à une vitesse considérablement plus faible que v_F (quelques mm/s).

Cet appariement à grande distance singularise la surface puisque les électrons qui lui sont proches ne trouvent qu'un demi espace pour former des paires.

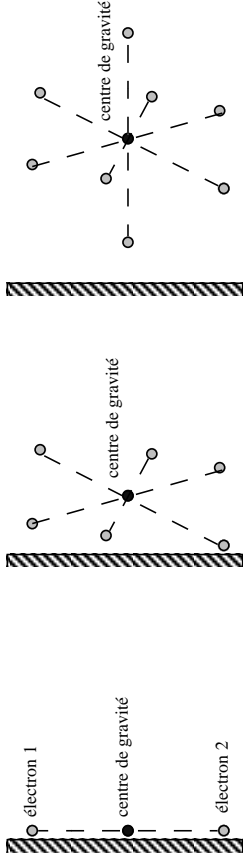


Figure 11 :localisation du centre de gravité d'une paire de Cooper

Ainsi, la densité de gravité de paires en voisinage de surface est extrêmement réduite. Un centre de gravité de paire ne peut être situé au voisinage immédiat de la surface, que si les électrons de la paire sont eux-mêmes situés à proximité immédiate de la surface, ce qui laisse peu de configurations géométriques à cette possibilité. Pour un centre de gravité plus avancé dans le matériau, le nombre de configurations de paires est plus important. Le nombre de configurations de paires de "même centre de gravité" atteint sa saturation si celui-ci est au moins à une distance ξ de la surface.

Ce raisonnement qualitatif explique le profil de densité de centres de gravité de paire de la figure 9.

V-4 Profil de la densité d'enthalpie de condensation

Chaque paire apporte son énergie de condensation et donc la densité d'enthalpie libre de condensation est proportionnelle à la densité de paires. Avec une région surfacique pauvre en centre de gravité de paires, la densité d'enthalpie libre de condensation ne présente plus le profil rectangulaire de la figure 3 mais un profil plus arrondi tel que celui de la figure 12.

ξ_S décroît progressivement à partir de la frontière normal/supraconducteur pour n'atteindre sa valeur minimale $-\frac{\mu_0 H_c^2}{2}$ qu'au delà de la distance ξ .

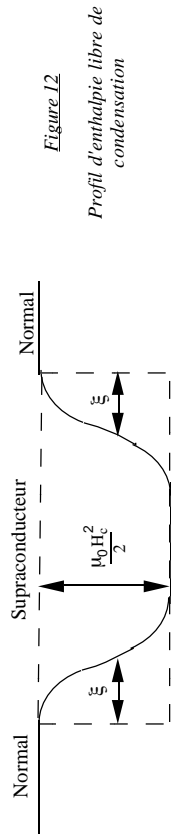


Figure 12

Profil d'enthalpie libre de condensation

La présence de cette longueur de corrélation conduit, par rapport au cas de la figure 3, à un relèvement relatif de l'enthalpie libre au voisinage des interfaces N/S, qui pourrait compenser l'abaissement d'enthalpie libre dû au défaut d'aimantation dans la zone de London.

VI- Stabilité des supraconducteurs de types I et II

VI-1 Enthalpies de surfaces positives et négatives.

Nous savons que:

En volume

La condensation de la phase supraconductrice conduit à un abaissement de la densité d'enthalpie libre de $\frac{\mu_0 H_c^2}{2}$ et l'aimantation conduit à une augmentation de l'enthalpie libre volumique de $\frac{\mu_0 H^2}{2}$.

En surface

Ces deux contributions sont modifiées:

Il existe une distance de l'ordre de ξ sur laquelle la baisse d'enthalpie libre de condensation est réduite. Cela conduit à une contribution positive à l'enthalpie libre de surface. Cette contribution positive est d'autant plus importante que ξ est grand

Il existe une distance λ sur laquelle l'augmentation d'enthalpie libre d'aimantation est atténuée. Cela conduit à une contribution négative à l'enthalpie libre de surface. Cette contribution négative est d'autant plus importante que λ est grand

Aussi en fonction de l'importance de l'une ou l'autre de ces distances, l'enthalpie libre de surface sera négative ($\xi < \lambda$) ou positive ($\xi > \lambda$) et les vortex seront stabilisés ou ne le seront pas.

Le paramètre $\kappa = \lambda/\xi$ et sa valeur par rapport à 1 vont décider du signe de l'enthalpie libre de surface par rapport à celle du volume:

$$\kappa = \frac{\lambda}{\xi}$$

et on attend:

- $\kappa < 1$ supraconducteur de type I
- $\kappa > 1$ supraconducteur de type II

VI-2 Enthalpie libre de surface, énergie de paroi

Nous allons comparer les enthalpies libres de deux situations:

- Une situation idéalisée (Fig. 6-a) à passage vide/supraconducteur abrupt: $\lambda=0$ et $\xi=0$
- La situation réelle (Fig. 6-a) où le passage est progressif avec la longueur de London λ et la longueur de cohérence ξ , toutes deux différentes de 0.

La différence entre les deux enthalpies libres sera appelée enthalpie libre de surface.

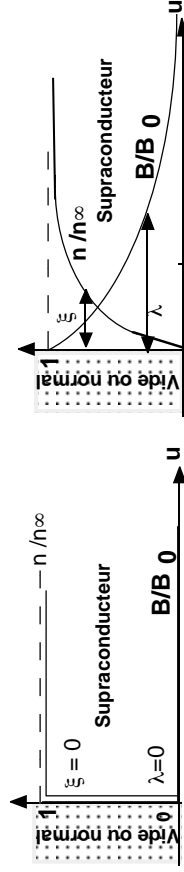


Figure 13-a:

Interface vide/supraconducteur abrupte $\lambda=0$ et $\xi=0$

Figure 14-b:

Longueurs caractéristiques à l'interface supraconducteur/vide

Densité d'enthalpie libre de condensation

Définissons $n_{\xi}(u)$ comme la densité de centre de gravité de paire à une distance u de la surface dans un matériau de longueur de corrélation ξ . Au coeur du supraconducteur, à grande distance de la surface $n_{\xi}(\infty) = n$.

L'énergie libre de condensation par paire s'écrit:

$$g_c(u) = -\frac{\mu_0 H_c^2}{2n}$$

et la densité d'enthalpie libre de condensation à une distance u de la surface est:

modèle abrupt (λ et $\xi = 0$) modèle réel (λ et $\xi \neq 0$)

$$g_c(u) = -\frac{\mu_0 H_c^2}{2} \text{ pour tout } u \quad g_c(u) = -\frac{\mu_0 H_c^2}{2} \frac{n_{\xi}(u)}{n}$$

$$\delta g_c(u) = -\frac{\mu_0 H_c^2}{2} \left[\frac{n_{\xi}(u)}{n} - 1 \right]$$

Et en choisissant un profil (pas nécessairement très heureux)

$$n_{\xi}(u) = n \left[1 - \exp\left(-\frac{u}{\xi}\right) \right]$$

L'écart entre l'enthalpie libre de condensation du modèle réel et celle du modèle abrupt s'écrit:

$$\delta g_c(u) = -\frac{\mu_0 H_c^2}{2} \exp\left(-\frac{u}{\xi}\right)$$

Densité d'enthalpie libre d'aimantation

En repartant de l'expression générale de la densité d'enthalpie libre magnétique du début du chapitre:

$$\frac{\mu_0 H^2}{2} \left[\exp\left(-\frac{u}{\lambda_c}\right) - 1 \right]$$

on a clairement dans chacun des cas:

modèle abrupt (λ et $\xi = 0$) modèle réel (λ et $\xi \neq 0$)

$$g_m(u) = +\frac{\mu_0 H^2}{2} \text{ pour tout } u \quad g_m(u) = -\frac{\mu_0 H^2}{2} \left[\exp\left(-\frac{u}{\lambda_c}\right) \right]$$

La différence entre l'enthalpie libre magnétique du modèle réel et celle du modèle abrupt s'écrit:

$$\delta g_c(u) = -\frac{\mu_0 H_c^2}{2} \exp\left(-\frac{u}{\xi}\right)$$

Enthalpie libre de surface

On appelle enthalpie libre de surface la différence entre l'enthalpie libre totale du modèle réel et l'enthalpie libre que présenterait le système, si la densité d'enthalpie libre était la même au voisinage de la surface qu'en volume (modèle abrupt):

$$\Delta G_{\sigma} = \int_0^{\infty} (\delta g_c(u) + \delta g_m(u)) \, du$$

Si ΔG_{σ} est négatif, il y a intérêt à créer de la surface, par exemple en introduisant des filaments normaux dans le supraconducteur. Le supraconducteur sera de type II

Si ΔG_{σ} est positif, les surfaces ne sont pas favorisées. Le supraconducteur sera de type I.

VI-2 Modélisation et illustration de l'enthalpie de paroi

Avec ces formes analytiques proposées, il vient (à vérifier):

$$\Delta G_s = \frac{\mu_0 H_c^2}{2} \xi \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \kappa^2 \frac{H^2}{H_c^2} \right) = \frac{\mu_0 H_c^2}{2} \xi \left(\kappa_c^2 - \kappa^2 \frac{H^2}{H_c^2} \right)$$

où $\kappa_c = \sqrt{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = 0.94$ est très proche de l'unité. On a alors :

valeur de κ	$\kappa < \kappa_c$ (type I)	$\kappa > \kappa_c$ (type II)
Signe de ΔG_σ en fonction de H	pour tout $H < H_c$ ($\Delta G_\sigma > 0$ (régime Meissner))	$H < H_c$ $\frac{\kappa_c}{\kappa} \Delta G_\sigma > 0$ (Meissner) $H > H_c$ $\frac{\kappa_c}{\kappa} \Delta G_\sigma < 0$ (Shubnikov)

Tableau II Signes des enthalpies libres de surface

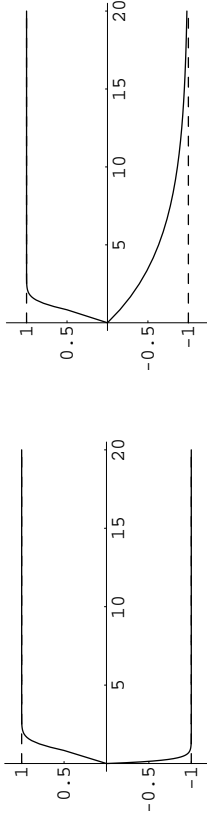


Figure 14 Profils des densités de paires de Cooper et d'aimantation au voisinage d'une surface. λa été choisi comme unité de longueur.

Quelques profils de densité d'énergie libre g_s sont représentés à la figure 14.

L'unité de densité d'énergie libre est $\frac{\mu_0 H_c^2}{2}$

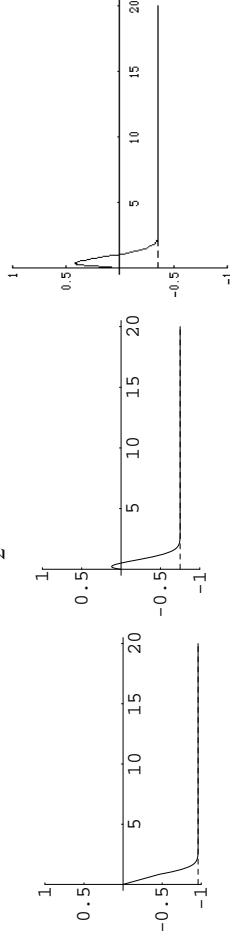


Figure 15: Profils de densités d'enthalpies libres au voisinage de surfaces dans un supraconducteur de type I

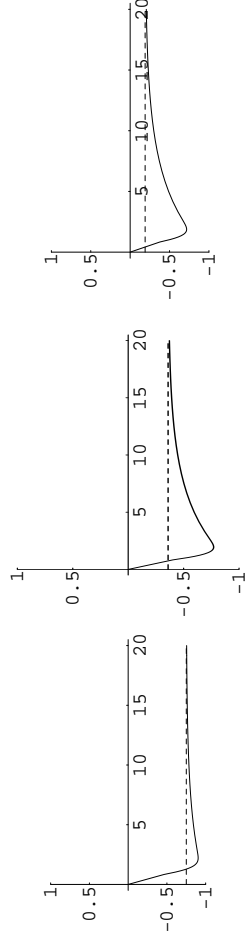


Figure 16: Profils de densités d'enthalpies libres au voisinage de surfaces dans un supraconducteur de type II

VI-Description d'un vortex

VI-1 Coeur du vortex

Sur la figure III-2, le vortex apparaît comme un filament normal entouré d'une zone de London.

Un modèle plus réaliste est celui de la figure 17 où ξ et λ sont à compter à partir du centre du vortex.

Nous irons plus loin dans la description des vortex au chapitre consacré à la théorie de Ginzburg-Landau en travaillant en symétrie cylindrique puisque n et B décroissent, non plus à partir d'une surface plane mais à partir d'un point central.

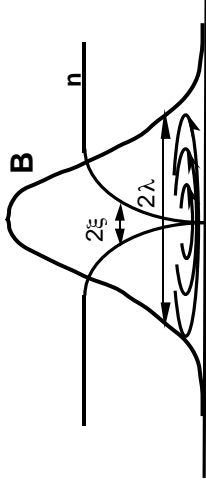


Figure 17

Profils de la densité de paire et du champ magnétique dans un vortex

n est la densité de paires, B le champ magnétique. Les courants supraconducteurs circule sur l'extension de B .

VI-2 Détermination de H_{c1} (modèle simplifié)

On peut déterminer H_{c1} en évaluant le coût en énergie libre de création d'un vortex.

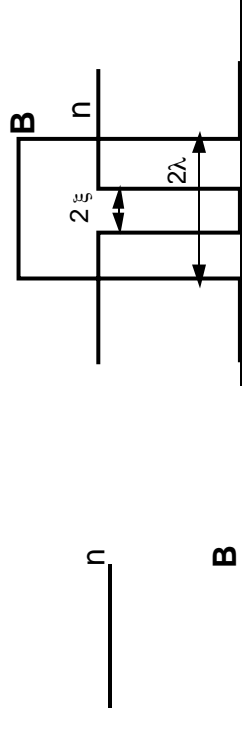


Figure 18-a

Figure 18-b

En l'absence de vortex B est nul et n prend une valeur constante.

Profil très schématisé de n et de B

L'Enthalpies libres que le système doit recevoir pour créer le vortex:

$$\Delta G_c = \pi \xi^2 \frac{\mu_0 H_c^2}{2} \quad \text{Enthalpie libre magnétique} \quad \Delta G_c = -\pi \lambda^2 \frac{\mu_0 H^2}{2}$$

Si la somme de ces enthalpies est positive, il n'y aura pas intérêt à créer un vortex.

Si la somme de ces enthalpies libres ΔG_{vortex} est négatives, il y aura intérêt à créer le vortex:

$$\Delta G_{\text{vortex}} = \pi \xi^2 \frac{\mu_0 H_c^2}{2} - \pi \lambda^2 \frac{\mu_0 H^2}{2}$$

Le champ H_{c1} est celui au delà duquel un vortex sera stable. On trouve facilement:

$$H_{c1} = \frac{\xi}{\lambda} H_c = \kappa H_c$$

De nouveau, pour avoir une phase de Shubnikov, il faut $H_{c1} < H_c$ et donc:

$$\kappa < 1$$

VII-2 Description à améliorer

Nous insistons encore sur le fait que ce modèle est encore à améliorer, notamment parce que nous n'avons pas tenu compte du fait que le flux du champ magnétique à l'intérieur du vortex était nécessairement un quantum ϕ_0 .

Nous allons revenir sur ce point dans quelques paragraphes, après avoir cependant fait un détour sur H_{c2} .

VII-1 Quantification du flux

Nous verrons au chapitre VI consacré aux effets de cohérence que le flux du champ magnétique à travers un trou logé dans un supraconducteur est nécessairement un nombre entier de fois un flux élémentaire ϕ_0 appelé fluxon:

$$\phi_0 = \frac{h}{q} = 2.07 \cdot 10^{-15} \text{ T.m}^2.$$

Ce qui s'applique à un trou s'applique en particulier à un vortex. On montrera par ailleurs que pour des raisons énergétiques, le flux à travers un vortex est une fois ϕ_0 et une seule. Le supraconducteur préfère loger 2 vortex de 1 fluxon que 1 vortex de 2 fluxons.

VII-2 Conséquence sur le profil de champ magnétique d'un vortex

Si on s'en tient au profil carré de la figure 17, et que l'on admet que λ est une grandeur caractéristique, il apparaît que B au sein du vortex ne peut pas être quelconque et doit satisfaire à:

$$B \pi \lambda^2 = \phi_0$$

Dans ce modèle simple, le champ magnétique B au sein du vortex est indépendant du champ H appliqué. En particulier il n'a aucune raison d'être égal au champ appliqué.

VII-3 Assemblée de vortex

La figure X représente un échantillon (de longueur infinie pour éviter les problèmes de champ démagnétisant). Le champ magnétique $B^0 = \mu_0 H^0 = \mu_0 H$ qui attaque l'échantillon sur toute sa section S le traverse en se concentrant sur les vortex au nombre de n et dont la section de chacun est $\pi \lambda^2$. Cela se faisant à flux constant, le champ moyen B au coeur des vortex, est nécessairement plus grand que B^0 .

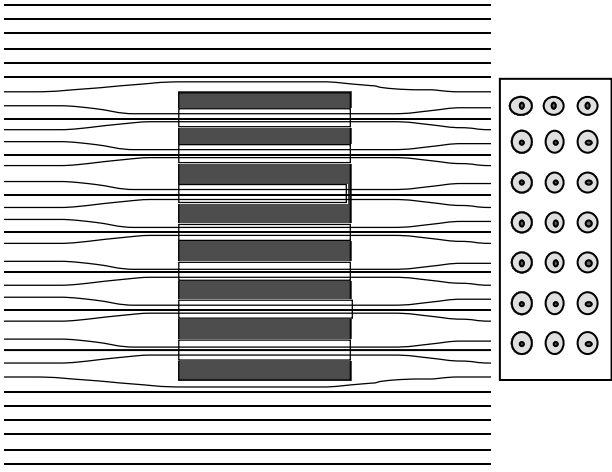


Figure 19

Vue de profil:

Les lignes de champ se concentrent dans les vortex uniformément répartis dans la section de l'échantillon dont la longueur est supposée être très grande.

Vue de dessus:

Répartition des vortex sous forme d'un réseau choisi ici carré.

En fait, l'hypothèse de traversée de tout le flux d'attaque par le canal des vortex est tout à fait correcte au voisinage immédiat de H_{c2} . Pour les champs inférieurs et en particulier lorsqu'on se rapproche de H_{c1} , elle doit être remise en cause...

...mais on ne peut pas traiter toutes les complications en même temps et l'ordre de grandeur de d n'est pas bouleversé, donc discutons sur ces chiffres.

VII- 4 Champ critique H_{c2}

Un vortex est caractérisé par son cœur de rayon ξ (longueur de cohérence) et l'extension de la zone de London de rayon λ .

λ étant toujours de l'ordre de 500Å, on peut dire que des vortex espacés de 3 ou 4 λ se touchent même pour des champs appliqués inférieurs à 10^{-1} T.

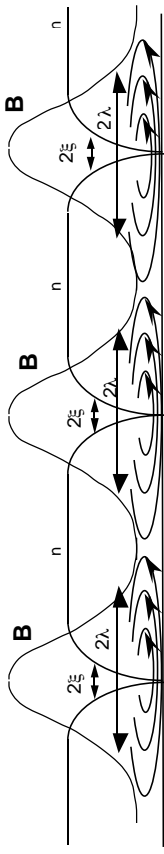


Figure 20: population de vortex dont les zones de London sont en contact

Mais qui dit contact entre les zones de London des vortex ne dit pas contact entre les coeurs de vortex, qui s'étendent sur ξ et ont un caractère de métal normal.

On peut raisonnablement imaginer que, dans un supraconducteur de type II, la matière cesse d'être supraconductrice, c'est-à-dire que l'on atteint H_{c2} lorsque les coeurs des vortex se touchent, ce qui conduit à :

$$H_{c2} = \frac{\phi_0}{\mu_0 4 \xi^2}$$

alors que des calculs conduits sur des modèles plus élaborés (Modèle de Ginzburg-Landau) conduisent à:

$$H_{c2} = \frac{\phi_0}{\mu_0 2\pi \xi^2}$$

ce qui est très satisfaisant.

C'est d'autant plus satisfaisant que dans le modèle de Ginzburg-Landau H_{c2} s'interprète par l'impossibilité pour les coeurs de vortex de s'interpénétrer, ce qui est exactement l'hypothèse utilisée ici.

La condition de quantification impose de prendre le problème à l'envers. Une hypothèse serait de dire que tout le flux de \mathbf{B} qui attaque l'échantillon (B^0S) le traverse en passant par le canal des vortex, chacun laissant passer un quantum de flux ϕ_0 . Le nombre N de vortex qui couvrirait une surface S d'échantillon serait déduit de la relation:

$$B^0S = n \phi_0$$

Si on admet que les vortex forment un réseau carré de paramètre d , leur nombre N est lié à la surface S par la relation $S = N d^2$ et la distance entre vortex s'écrirait:

$$d = \sqrt{\frac{\phi_0}{B^0}}$$

ϕ_0 étant une grandeur connue égale à $2.07 \cdot 10^{-15}$ T. m², on peut facilement calculer d en fonction de B^0 , qui donne:

Champ B^0 appliqué (T)	10^{-2}	10^{-1}	1	10	100	1000
Distance entre vortex (Å)	4500	1400	450	140	45	14

VIII Retour sur le champ critique inférieur H_{c1}

Le calcul simple de H_{c1} que nous avons fait conduit à un résultat très proche de celui de Ginzburg-Landau et pourtant les approches sont assez différentes et l'équivalence physique est loin d'être directe.

VIII-1 Position des problèmes

Dans les paragraphes du début de ce chapitre, la condition de formation d'un vortex a été basé sur la compétition entre deux termes:

$$\begin{aligned} \text{Une élévation de l'enthalpie de condensation} \quad \Delta G_c &= \frac{\mu_0 H_c^2}{2} \pi \xi^2 \\ \text{Un abaissement de l'énergie magnétique} \quad \Delta G_m &= -\frac{\mu_0 H^2}{2} \pi \lambda^2 \end{aligned}$$

Nous avons admis implicitement que dans le vortex le champ magnétique \mathbf{B} décroissait exponentiellement à partir de la valeur que prend ce champ à l'extérieur, soit $\mu_0 \mathbf{H}$.

Mais en faisant cela ϕ , le flux de \mathbf{B} à travers le vortex, est égal à:

$$\phi_{\text{vortex}} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = \mu_0 H S$$

Qui, sauf accident rarissime, ne sera jamais égal au quantum de flux ϕ_0 .

Cela signifie que le champ moyen dans le vortex d'extension de London λ , est:

$$\mathbf{B}_{\text{vortex}} = \frac{\phi_0}{\pi \lambda^2}$$

Manifestement, le vortex est un système rigidifié par la condition de quantification. On ne peut plus calculer l'énergie en modifiant progressivement l'aimantation du vortex sous champ et écrire la variation d'enthalpie $\mathbf{H}d\mathbf{I}$ où \mathbf{H} et \mathbf{I} varient simultanément.

VIII-2 Eléments de l'énergie du vortex

Nous allons calculer l'enthalpie libre magnétique du vortex rigide en 3 étapes:

- i) Condensation du coeur
- ii) Formation du vortex à l'infini en champ nul ϵ_1
- iii) Déplacement du vortex, de l'infini au champ \mathbf{H} déjà préétabli dans le supraconducteur.

i) Enthalpie libre de condensation du coeur.

Dans le modèle de profil carré, le coeur occupe par unité de longueur de vortex un volume $\pi \xi^2$. Avec une densité d'enthalpie libre de condensation $\frac{\mu_0 H_c^2}{2}$ (c'est d'ailleurs la définition de H_c), l'énergie de condensation s'écrit:

$$\Delta G_{\text{con}} = \frac{\mu_0 H_c^2}{2} \pi \xi^2$$

ii) Formation du vortex

Elle consiste à fabriquer à l'infini un échantillon supraconducteur se réduisant à un vortex. Outre l'énergie de condensation que nous ne considérons plus pour l'instant, il faut créer le champ magnétique \mathbf{B} et animer les électrons supraconducteurs d'un mouvement de rotation en leur fournissant une énergie cinétique. Il suffit de reprendre la forme d'énergie développée au paragraphe VIII-3 du chapitre II et de l'intégrer sur le vortex.

$$\epsilon_1 = \frac{1}{2} \int_{\text{vortex}} \mu_0 (\mathbf{B}^2 + \lambda_L^2 (\mathbf{rot} \mathbf{B})^2) \mathbf{dr}$$

Il s'agit du travail que doit dépenser l'expérimentateur pour fabriquer le vortex. C'est une variation d'énergie libre ($dF = -SdT + \delta W$).

Son calcul requiert une connaissance approfondie du profil de \mathbf{B} que nous verrons dans le chapitre consacré à la théorie de Ginzburg-Landau.

Ici nous considérerons \mathbf{B} constant sur $\pi \lambda^2$ et admettons que la contribution d'énergie cinétique des électrons est égale à l'énergie magnétique du champ, comme nous l'avions montré dans un cas particulier au paragraphe VIII-2 du chapitre II.

Cette énergie libre entre dans l'enthalpie libre du vortex ($G = F - \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}$). Pour rappeler qu'il provient de la formation du vortex, nous l'écrivons:

$$\epsilon_1 = 2 \frac{1}{2} \int_{\text{vortex}} \mu_0 \mathbf{B}^2 \mathbf{dr} = 2 \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} \pi \lambda^2 \left(\frac{\phi_0}{\pi \lambda^2} \right)^2 = \frac{\phi_0^2}{\mu_0 \pi \lambda^2}$$

(Ce terme est le ϵ_1 de Tinkam (TIN-p.148) et de la plupart des auteurs. Calculé de façon plus élaborée dans le cadre de la théorie de Ginzburg-Landau où dans la limite $\xi \ll \lambda$, il s'écrit $\epsilon_1 = \frac{\phi_0^2}{4\pi \mu_0 \lambda^2} \ln \left(\frac{\lambda}{\xi} \right)$). La présence de ξ dans cette relation peut paraître étrange, mais tient à la saturation de \mathbf{B} pour $r < \xi$)

iii) Déplacement du vortex, de l'infini au champ H déjà pré-établi.

Le vortex formé en champ H nul présente une densité d'aimantation \mathbf{I} réelle que

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{I}$$

Son aimantation totale $\mathbf{M} = \mathbf{V} \mathbf{I}$ où V est le volume du vortex soit une aimantation par unité de longueur:

$$\mathbf{M} = \pi \lambda^2 \left(\frac{\phi_0}{\pi \lambda^2} \right)$$

L'énergie de déplacement du vortex au champ \mathbf{H} est aussi celle qu'acquiert un moment \mathbf{M} dans un champ \mathbf{H} , soit:

$$\Delta G_d = -\mu_0 \mathbf{H} \pi \lambda^2 \left(\frac{\phi_0}{\pi \lambda^2} \right) = -\mathbf{H} \phi_0$$

(C'est le terme $-\mathbf{M}\mathbf{H}$ de $G = F - \mathbf{M}\cdot\mathbf{H}$)

VIII-2 Stabilité du vortex et H_{c1}

L'enthalpie libre ΔG_{vortex} requise pour la formation du vortex est donc:

$$\Delta G_{\text{vortex}} = \Delta G_{\text{con}} + \varepsilon_1 - \mathbf{M}\mathbf{H}$$

$$\Delta G_{\text{vortex}} = \frac{\mu_0 H_c^2}{2} \pi \xi^2 + \frac{\phi_0^2}{\mu_0 \pi \lambda^2} - \mathbf{H} \phi_0$$

Le vortex pourra être stabilisé si cette enthalpie libre totale est négative, soit à partir d'un champ H_{c1} tel que:

$$H_{c1} \phi_0 = \frac{\mu_0 H_c^2}{2} \pi \xi^2 + \frac{\phi_0^2}{\mu_0 \pi \lambda^2}$$

Le développement que l'on rencontre le plus souvent [TIN-p.148] concerne les supraconducteurs de type II pour lesquels ξ est très petit et où on admet que l'enthalpie de formation de coeur est négligeable, puisque le coeur est peu étendu. On oublie le terme d'enthalpie de condensation et il vient:

$$H_{c1} = \frac{\phi_0}{\mu_0 \pi \lambda^2}$$

Le calcul classique effectué dans le cadre de Ginzburg-Landau avec ΔG_{mf} mentionné au paragraphe précédent conduit à:

$$H_{c1} = \frac{\phi_0}{4\pi \mu_0 \lambda^2} \ln \left(\frac{\lambda}{\xi} \right)$$

Ces deux résultats ne sont pas dramatiquement différents car, même si λ/ξ atteint 100, son logarithme n'est que de 4.6 et vient même compenser le facteur 4 dans le dénominateur de Tinkham.

VIII-3 Retour sur l'expression de H_{c1}

La nouvelle expression de H_{c1} semble très différente de celle déterminée comme le font simplement Kittel-Rose-Innes-Rhoderick et comme nous l'avons reproduit au paragraphe VI-2. Mieux, nous avons complètement abandonné le terme d'énergie de condensation qui jouait un rôle prépondérant dans le premier calcul de H_{c1} en venant contrebalancer l'énergie magnétique.

En fait nous verrons avec la théorie de Ginzburg-Landau que le champ critique H_c et les longueurs caractéristiques λ et ξ sont liés au quantum de flux ϕ_0 par la relation

$$H_c = \frac{\phi_0}{\sqrt{2} \pi \mu_0 \xi \lambda}$$

ce qui amène à exprimer de nouveau H_{c1} à partir de H_c avec:

$$H_{c1} = H_c \frac{\lambda}{\sqrt{2} \xi}$$

qui, à $\sqrt{2}$ près, est la relation trouvée précédemment, ce qui est non relevant au vu des approximations que nous avons faites.

Mais nous n'avons toujours pas tenu compte de l'énergie de condensation et nous pourrions croire que les deux raisonnements conduisent fortuitement au même résultat.

Ces deux points de vue nous semblent (sous toute réserve) pouvoir être réconciliés si on remarque que l'expression de H_c en fonction de λ , ξ et ϕ_0 conduit à l'égalité des 2 termes qui s'additionnent dans le membre de droite de la relation qui donne H_{c1} :

$$\frac{\mu_0 H_c^2}{2} \pi \xi^2 = \frac{\phi_0^2}{\mu_0 \pi \lambda^2}$$

ce qui voudrait dire que le terme d'enthalpie libre de condensation ΔG_c et le terme de formation du vortex ΔG_{mf} apparaissent comme égaux et que l'on aurait été bien prompt à oublier l'énergie de condensation de coeur sous prétexte qu'elle concernait moins de volume lorsque ξ est petit. On a un peu oublié que si ξ était petit, H_c était très grand ! mais bon, c'est ce qu'on fait en Ginzburg-Landau.

Pour ce qui est du résultat final, c'est sans conséquence puisque, H_{c1} étant proportionnelle à la racine carré de la somme de ces deux termes, prendre un seul des 2 ou la somme des deux ne vient changer le résultat que d'un facteur $\sqrt{2}$.

Cette égalité entre les termes est certainement une coïncidence des approximations puisque, avec le calcul plus complet de Ginzburg-Landau pour $\kappa \gg 1$, le terme d'enthalpie de condensation est 3 à 4 fois plus petit que le terme de formation. Ces deux termes restent du même ordre de grandeur, si bien qu'en raisonnant sur ce terme seul on trouve un résultat équivalent.

Alors était-il inutile de considérer l'enthalpie libre de condensation? Et toute l'importance de la balance entre les enthalpies libres magnétiques et de condensation est-elle à rejeter?

La réponse est clairement non, car si l'enthalpie de condensation devenait très grande, c'est elle qui dominerait. Une enthalpie de condensation qui vient contrebalancer l'enthalpie libre magnétique est donc une condition nécessaire, même si elle n'est pas suffisante. De fait, à un facteur 3 ou 4 près, elle l'est.

VI-2 Relations entre les champs critiques

En retenant pour H_c , H_{c1} et H_{c2} les équations dérivées de l'analyse de Ginzburg-Landau et retrouvées ici à de petits facteurs près, nous avons:

Expressions des champs critiques

$$H_c = \frac{\phi_0}{\sqrt{2} \cdot 2\pi \mu_0 \xi \lambda} \quad H_{c1} = \frac{\phi_0}{4\pi \mu_0 \lambda^2} \ln \left(\frac{\lambda}{\xi} \right) \quad H_{c2} = \frac{\phi_0}{\mu_0 2\pi \xi^2}$$

Relations entre H_{c1} , H_{c2} et H_c

$$H_{c1} = \frac{H_c}{\sqrt{2}} \ln \kappa \quad H_{c2} = H_c \sqrt{2} \kappa$$

Relations entre H_{c1} , H_{c2} et κ le rapport entre les longueurs caractéristiques

$$\frac{H_{c2}}{H_{c1}} = \frac{2 \kappa^2}{\ln \kappa} \quad H_{c1} H_{c2} = H_c^2 \ln \kappa$$

Et on peut faire un petit tableau d'ordres de grandeur en prenant en unité pratique:

$$\mu_0 H_c = \frac{2.3 \cdot 10^{-16}}{\xi \lambda}$$

$\lambda = 500 \text{ \AA}$

ξ	κ	H_c	H_{c1}	H_{c2}
5	100	9,2		
20	25	2,3 T	81	
50	10	0,92 T	13	
200	2,5	0,23 T		
500	1	0,092 T		
2000	0,25			

Que on peut comparer aux tableaux de valeurs expérimentales:

VII Réexamen de la longueur de pénétration du champ

VII-1 Longueur de London

Au cours des chapitres, nous avons abandonné la notation λ_L au profit de λ , sans indice L. Les expériences avaient en effet montré que la pénétration du champ magnétique était bien réelle, mais que la valeur λ trouvée était supérieure à la valeur théorique de λ_L :

Une partie de ce décalage provient de la longueur de cohérence ξ .

En fait, la longueur de cohérence ξ est le résultat d'une concurrence entre une longueur de cohérence intrinsèque ξ_0 et le libre parcours moyen des électrons ℓ .

Dans un premier temps, nous oublions la longueur limitative que représente ℓ et nous assimilons ξ à ξ_0 .

Souvenons nous que la longueur de London λ correspond à l'épaisseur nécessaire aux supercourants pour écranter le champ magnétique extérieur. Aussi, plus la densité de paires supraconductrices est élevée, plus la densité de courant dans la zone de London est importante et moins étendue est la longueur de pénétration λ .

Si la densité de paires n'est pas uniforme, la densité de courant ne l'est pas non plus et les régions de faible densité de paires de Cooper (et de courant) s'avèrent peu efficaces pour l'écranage. C'est le cas du voisinage immédiat de la surface, en particulier lorsque ξ_0 est grand. Le champ magnétique peu écrané par le voisinage immédiat de la surface pauvre en paires de Cooper peut s'enfoncer plus profondément dans le supraconducteur. Si au contraire ξ_0 est petit devant λ_L , la zone de faible densité de paires est très réduite et la longueur de pénétration se trouve peu affectée. Ainsi:

$$\xi_0 \ll \lambda_L \Rightarrow \lambda = \lambda_L$$

$$\xi_0 \gg \lambda_L \Rightarrow \lambda > \lambda_L$$

VII-2 Proposition de visualisation graphique

Dans la limite $\xi_0 = 0$ (ce qui revient à ignorer l'effet d'une longueur de cohérence) le champ évolue depuis la surface du supraconducteur suivant:

$$B = B^0 \exp\left(-\frac{u}{\lambda_L}\right) = B^0 \exp\left(-u \sqrt{\frac{n q^2}{m}}\right)$$

où λ_L a été remplacé par sa valeur théorique. Si n dépend de u [noté $n(u)$] on peut imaginer une approximation qui consisterait à découper l'espace en tranches d'épaisseur δu telles que entre le début de la tranche i en $u_i = (i-1)\delta u$ et la fin de la même tranche en $u_i + \delta u$, le champ magnétique ait décru d'un facteur:

$$\exp\left[-\delta u \sqrt{\frac{n(u_i) q^2}{m}}\right]$$

Tracer $B(u)$ pour $n(u) = n = \text{constante}$ et $B(u)$ pour $n(u) = n \left[1 - \exp\left(-\frac{u}{\xi_0}\right)\right]^2$

VII-2 Equations non locales

En jauge de London, il y a en chaque point de l'espace proportionnalité entre la densité de courant $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ et le potentiel vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\frac{n q^2}{m} \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

Vu la distance qui sépare les électrons d'une même paire, l'aspect local de cette relation peut être remis en cause.

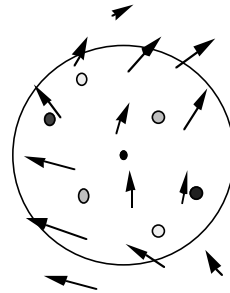


Figure 21

Paires de Cooper dans un champ de potentiel vecteur inhomogène

Pour cela considérons le point \mathbf{r}_0 (centre du cercle de la figure 17). Ce point est le centre de gravité de trois paires (entre autres) repérées par des niveaux de gris différents. Les flèches représentent le champ de potentiel vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ dans l'espace.

Question: des deux propositions ci-dessous, laquelle doit-on retenir?

- i) doit-on écrire que en \mathbf{r}_0 la densité de courant est proportionnelle au potentiel vecteur en ce point $\mathbf{A}(\mathbf{r}_0)$?

ou bien:

- ii) faut-il tenir compte du potentiel vecteur \mathbf{A} non pas en \mathbf{r}_0 , mais au niveau des électrons qui composent les paires dont le centre de gravité est en \mathbf{r}_0 ?

Si ce n'est pas en ces termes que Pippard, cinq ans avant l'hypothèse des paires de Cooper, a posé le problème, c'est finalement à cela que sa proposition d'équation non locale de \mathbf{j} revient.

et pour cela retenons l'assertion ii)

la valeur de \mathbf{j} au point \mathbf{r}_0 est lié à la distribution des valeurs de \mathbf{A} aux points où se trouvent les électrons composant les paires dont les centres de gravité sont en \mathbf{r}_0 .

$\mathbf{j}(\mathbf{r}_0)$ est proportionnel à la valeur moyenne $\bar{\mathbf{A}}_{\xi_0}(\mathbf{r}_0)$ de \mathbf{A} dans la sphère de centre \mathbf{r}_0 et de rayon égal à la longueur de cohérence ξ_0 :

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}_0) = -\frac{\mu_0 n q^2}{m} \bar{\mathbf{A}}_{\xi_0}(\mathbf{r}_0)$$

Le facteur de proportionnalité est le facteur habituel rencontré en jauge de Lorentz.

Puisque \mathbf{A} varie sur la longueur λ , deux cas limites peuvent être envisagés:

$\xi_0 \ll \lambda$, \mathbf{A} ne varie pratiquement pas dans la sphère et $\bar{\mathbf{A}}_{\xi_0}(\mathbf{r}_0) = \mathbf{A}(\mathbf{r}_0)$, $\lambda = \lambda_L$.

$\xi_0 \gg \lambda$, et puisque l'on considère le problème comme unidimensionnel (c'est vrai en proximité de surface extérieure) \mathbf{A} garde "sa" valeur sur une distance λ petite par rapport à ξ_0 . En première approximation: $\bar{\mathbf{A}}_{\xi_0}(\mathbf{r}_0) = \frac{\lambda}{\xi_0} \mathbf{A}(\mathbf{r}_0)$. Aussi peut-on écrire:

$$\mathbf{j} = -\frac{1}{\lambda_L} \frac{\lambda}{\xi_0} \mathbf{A} = -\frac{1}{\lambda} \mathbf{A}$$

la deuxième égalité provenant de la définition même de λ .

Cela conduit à une estimation de λ telle que $\lambda^3 = \lambda_L^2 \xi_0$ [GEN-p.21]

De Gennes signale qu'un calcul beaucoup plus compliqué conduit à $\lambda^3 = 0.62 \lambda_L^2 \xi_0$.

VII-4 Expression non locale de Pippard

En 1953, Pippard avait proposé une équation non locale reliant \mathbf{j} et \mathbf{A} (Revoir les motivations). Guidé par une expression de l'effet de peau anormal, il avait proposé:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}_0) = -\frac{3 n q^2}{4 \pi \xi_0 m} \int \frac{[(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})] (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^4} \exp\left(-\frac{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|}{\xi_0}\right) d\mathbf{r}$$

que l'on peut récrire:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}_0) = -\frac{n q^2}{m} \frac{3}{4\pi \xi_0} \int \left[\frac{[(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \right] \left[\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \right] \left[\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2} \exp -\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{\xi_0} \right] d\mathbf{r}$$

où le premier terme entre crochets est le vecteur projeté de $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ sur la direction \mathbf{r}

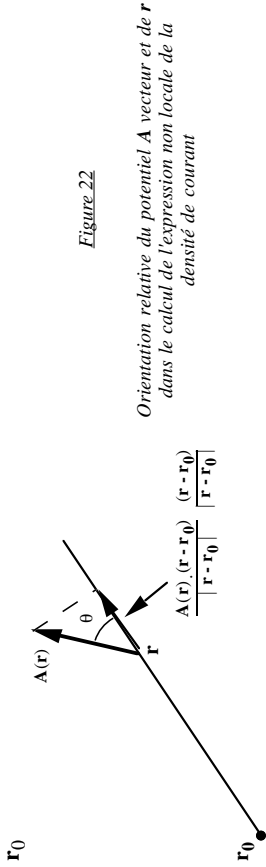


Figure 22

Orientation relative du potentiel \mathbf{A} vecteur et de \mathbf{r} dans le calcul de l'expression non locale de la densité de courant

$$\frac{\mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}$$

le second terme entre crochets est le poids à apporter en \mathbf{r}_0 au potentiel vecteur en \mathbf{r} ; ce poids diminue exponentiellement avec la distance. (il ne faut pas oublier que $d(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$ varie comme $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2$.

le facteur devant le signe intégrale est tel que si \mathbf{A} est uniforme sur une distance recouvrant la zone d'intégration (typiquement un rayon ξ_0) on retrouve l'expression locale habituelle.

Il faut bien voir que cette expression postulée par Pippard était une pure analogie et n'a pas de vertu autre que moyenner \mathbf{A} sur une distance de l'ordre de ξ_0 en pondérant avec la distance.

\mathbf{j} apparaît comme un produit de convolution. Il peut s'écrire:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}_0) = \int \mathbf{A}(\mathbf{r}) \gamma(\mathbf{r}_0-\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \mathbf{A} * \mathbf{K}$$

dont la transformée de Fourier s'écrit:

$$\mathbf{j}(\mathbf{q}) = \mathbf{A}(\mathbf{q}) \gamma(\mathbf{q})$$

Une telle relation linéaire entre composantes de Fourier se déduit de BCS [BUR-p.6, TIN-p.76]

VII-5 Effet des impuretés

En fait, Pippard étudiait le rôle des impuretés. Il avait observé que 3% d'étain dans l'indium doublait la longueur de pénétration alors qu'il ne modifiait que de 2% la température de transition T_c . Il avait conclu que les impuretés ne modifiaient pas l'état

supraconducteur mais changeaient la longueur de cohérence. C'est de cette considération que lui est venue l'idée du rapprochement avec l'effet de peau anormal où le libre parcours moyen ℓ des électrons devient plus grand que l'épaisseur de peau normale.

Il proposa la relation:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}_0) = -\frac{3 n q^2}{4\pi \xi_0 m} \int \left[\frac{[(\mathbf{r}_0-\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})]}{|\mathbf{r}_0-\mathbf{r}|^4} \right] \frac{(\mathbf{r}_0-\mathbf{r})}{|\mathbf{r}_0-\mathbf{r}|} \exp -\frac{|\mathbf{r}_0-\mathbf{r}|}{\xi} d\mathbf{r}$$

où la longueur de cohérence effective devient ξ avec:

$$\frac{1}{\xi} = \frac{1}{\xi_0} + \frac{1}{\ell}$$

mais où la normalisation s'effectue sur ξ_0

Cela revient à dire que seuls les électrons se trouvant dans une sphère de centre \mathbf{r}_0 et de rayon ℓ apportent en \mathbf{r}_0 l'information de \mathbf{A} .