

CHAPITRE VI

Effets de cohérence

Les paires de Cooper

I-1 Description sommaire

Comme nous l'avons déjà évoqué (Chap. V §V-4), les électrons responsables de la supraconductivité se "groupent" par deux et forment ce que l'on appelle des paires de Cooper.

En l'absence de courant, les électrons d'une même paire présentent des vecteurs d'onde individuels et des spins opposés. Une paire de Cooper peut donc être notée: $(\mathbf{k}\uparrow, -\mathbf{k}\downarrow)$, (dans la théorie BCS, des électrons de vecteurs d'onde et de spin non opposés n'interagissent pas suffisamment pour former une paire)

La preuve expérimentale de l'entité "paire de Cooper" est apportée par la valeur du quantum de flux Φ_0 , et nous verrons qu'il nécessite la présence de paires dont la charge est double de celle de l'électron $q = -2e$.

I-2 Fonction d'onde d'une paire de Cooper

Problème à deux corps en mécanique classique

Classiquement, un ensemble de deux particules est repéré, soit par les positions individuelles \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 de chacune des particules, soit par la position de leur centre de gravité $\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$ et la distance qui les sépare $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$.

Le mouvement de deux particules interagissant par un système de forces internes \mathbf{f}_1 et $\mathbf{f}_2 = -\mathbf{f}_1$ peut se décrire par la superposition du mouvement du centre de gravité et du mouvement des particules autour du centre de gravité. [CAGnac p 142]

Le centre de gravité se voit affecter la masse totale $M = m_1 + m_2$ et se déplace à la vitesse $\mathbf{V} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}$. Il emporte une quantité de mouvement $\mathbf{P} = M \mathbf{V}$

Le mouvement autour du centre de gravité se ramène à celui d'une particule fictive de masse réduite μ ($\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$) située à la distance $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ du centre de gravité et soumise de la part de celui-ci à la force \mathbf{f}_1 .

Si une même force $\mathbf{F}/2$ s'ajoute sur chacune des particules à \mathbf{f}_1 et \mathbf{f}_2 , le centre de gravité est soumis à une force \mathbf{F} et subit une accélération donnée par la loi fondamentale

de la dynamique $\mathbf{F} = M \frac{d\mathbf{V}}{dt}$. La force $\mathbf{F}/2$ peut par exemple apparaître si les deux particules de même charge sont soumises au même champ électrique.

L'énergie d'un système de deux particules interagissant au travers d'un potentiel U est égale à la somme de l'énergie cinétique de la première particule $\frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1}$, de l'énergie cinétique de la seconde $\frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2}$ et de l'énergie potentielle d'interaction $U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$.

$$E = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2} + U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

et en écrivant:

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \quad \text{et} \quad \mathbf{p} = \frac{m_1 \mathbf{p}_1 - m_2 \mathbf{p}_2}{m_1 + m_2}$$

l'énergie prend aussi la forme:

$$E = \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + U(\mathbf{r})$$

ce qui revient à l'exprimer comme la somme de l'énergie cinétique du centre de gravité, de l'énergie cinétique de la particule fictive autour du centre de gravité et de l'énergie potentielle d'interaction à laquelle est soumise la particule fictive.

Si en outre les particules sont soumises à un potentiel extérieur commun ne dépendant que de la position du centre de gravité, un terme $V(\mathbf{R})$ doit être ajouté.

Problème à deux corps en mécanique quantique

L'Hamiltonien construit à l'aide du principe de correspondance s'écrit donc:

$$\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\frac{\hbar^2}{2m_1} \Delta_{\mathbf{r}_1} - \frac{\hbar^2}{2m_2} \Delta_{\mathbf{r}_2} + U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

ou avec le second jeu de variables:

$$\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta_{\mathbf{R}} - \frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_{\mathbf{r}} + U(\mathbf{r}) + V(\mathbf{R})$$

Dans cette nouvelle forme, l'Hamiltonien se présente comme la somme de termes ne dépendant pour les uns que de \mathbf{R} et pour les autres que de \mathbf{r} .

La recherche des fonctions propres:

$$\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \tilde{\varphi}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \tilde{E} \tilde{\varphi}(\mathbf{r}, \mathbf{R})$$

s'effectue par séparation des variables;

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \phi(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{R})$$

ce qui conduit deux équations aux valeurs propres indépendantes:

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \Delta_{\mathbf{R}} \varphi(\mathbf{R}) + V(\mathbf{R}) \varphi(\mathbf{R}) = E \varphi(\mathbf{R}) \quad -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_{\mathbf{r}} \phi(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) = \varepsilon \phi(\mathbf{r})$$

avec:

$$\vec{E} = E + \epsilon$$

La densité de probabilité de trouver les particules distantes de \mathbf{r} est:

$$\frac{|\phi(\mathbf{r})|^2}{|\psi(\mathbf{R})|^2}$$

La densité de probabilité de présence du centre de gravité en \mathbf{R} s'écrit:

Le traitement quantique (COH-p.795) d'un système à deux corps est donc très analogue au traitement classique. L'étude de l'ensemble de deux particules en interaction au travers d'un potentiel $U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ se ramène à celle de la particule "centre de gravité" de masse $M = m_1 + m_2$ et à celle de la particule de masse réduite μ interagissant avec le potentiel $U(\mathbf{r})$.

Les paires de Cooper

On peut dans un premier temps imaginer une paire de Cooper comme l'ensemble de deux électrons interagissant (Chap.V §V-4)

De l'extérieur, elle apparaît comme une particule, celle que nous avons assimilé au centre de gravité.

Une paire de Cooper constitue une particule de masse $2m_e$ et de charge $-2|e|$.

C'est à cette seule entité que nous consacrons la suite de ce chapitre.

Aussi, en l'absence d'ambiguïté, nous abandonnons les notations majuscules \mathbf{R} , \mathbf{M} etc., pour conserver les notations minuscules m , q , n , \mathbf{k} , \mathbf{r} qui représentent dorénavant la masse, charge, densité, vecteur d'onde et position d'une paire de Cooper

Nous verrons toutefois dans l'introduction à BCS que la machinerie interne des paires de Cooper est nettement plus complexe que la simple interaction entre deux électrons, en raison essentiellement de la distance entre électrons d'une même paire et du recouvrement d'un grand nombre de paires.

I-2 Cohérence et fonction d'onde du condensat.

le principe

Les paires de Cooper obéissent à une loi nouvelle essentielle:

Cette loi stipule que toutes les paires de Cooper sont situées dans le même état quantique, ce qui signifie qu'elles sont décrites par une fonction d'onde unique, avec phase bloquée.

La suite de ce paragraphe montre comment on peut adapter la fonction d'onde d'une particule (ici une paire de Cooper) à celle du condensat: l'ensemble des paires de Cooper dans un état cohérent.

Fonction d'onde d'une particule

La fonction d'onde d'une particule (centre de gravité d'une paire) $\psi(\mathbf{r}, t)$ obéit à l'équation de Schrödinger:

$$\hat{H} \psi(\mathbf{r}, t) = i \hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

et présente la propriété de fournir la densité de probabilité de trouver la particule en tout point \mathbf{r} à l'instant t par:

$$|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 = P(\mathbf{r}, t)$$

La densité de particules par unité de volume $n(\mathbf{r}, t)$ autour du point \mathbf{r} à l'instant t est égal au nombre de particules total N de particules, multiplié par la densité de probabilité de présence:

$$n(\mathbf{r}, t) = N P(\mathbf{r}, t)$$

Fonction d'onde du condensat

On préfère alors introduire la fonction d'onde du condensat telle que sa norme au carré donne directement la densité de particules soit:

$$|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 = n(\mathbf{r}, t)$$

La norme de la fonction d'onde est la racine carrée de la densité de particules.

Bien sur, il faut en outre lui ajouter une phase $\theta(\mathbf{r}, t)$ qui disparaît dans la norme soit:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{n(\mathbf{r}, t)} \exp i\theta(\mathbf{r}, t)$$

L'évolution spatio-temporelle de ψ obéit à l'équation de Schrödinger. $n(\mathbf{r}, t)$ et $\theta(\mathbf{r}, t)$ évoluent en conséquence.

(il n'y a en général pas de confusion possible entre la fonction d'onde d'une particule et celle du condensat: nous n'avons pas changé de notation)

I-3 Nouvelle relation d'incertitude

L'incertitude sur la phase multipliée par l'incertitude sur le nombre de particules est de l'ordre de grandeur de l'unité [LEV-p.457]
relation d'incertitude que l'on retrouve dans le laser ou l'hélium superfluide.

II Phase et potentiel vecteur

II-1 Quantité de mouvement et impulsion

Comme indiqué dans l'annexe I, une distinction est à faire, aussi bien en mécanique classique qu'en mécanique quantique entre la quantité de mouvement \mathbf{P} d'une particule et son impulsion \mathbf{p} .

La quantité de mouvement \mathbf{P} d'une particule est simplement le produit de sa masse et de sa vitesse.

$$\mathbf{P} = m \mathbf{v}$$

L'impulsion est définie à partir du Lagrangien $\mathcal{L}(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t))$ par:

$$\mathbf{p} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}}$$

Lorsque la force dérive d'un potentiel, ces grandeurs sont confondues mais en présence d'un champ électromagnétique elles sont liées par la relation:

$$\mathbf{p} = m \mathbf{v} + q \mathbf{A}$$

et donc séparées par la grandeur $q\mathbf{A}$.

II-2 Courant, potentiel vecteur et déphasage

En mécanique quantique, le vecteur d'onde \mathbf{k} est associé à l'impulsion \mathbf{p} (et non à \mathbf{P}).

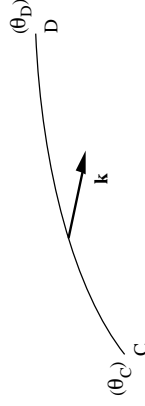


Figure 1

Le déphasage entre deux points est égal à la circulation du vecteur d'onde $\mathbf{k} = \frac{\mathbf{p}}{\hbar}$

Le déphasage de la fonction d'onde entre deux points C et D s'écrit comme la circulation de \mathbf{k} sur le chemin suivi:

$$\theta_D - \theta_C = \int_C^D \mathbf{k} \cdot d\mathbf{l} = \int_C^D \frac{\mathbf{p}}{\hbar} \cdot d\mathbf{l}$$

Dans le cas simple où la force dérive d'un potentiel, cela donne:

$$\theta_D - \theta_C = \int_C^D \frac{m \mathbf{v}}{\hbar} \cdot d\mathbf{l}$$

pour une particule chargée dans un champ électromagnétique.

$$\theta_D - \theta_C = \int_C^D \frac{m \mathbf{v} + q \mathbf{A}}{\hbar} \cdot d\mathbf{l}$$

soit aussi en introduisant la densité de courant:

$$\mathbf{j} = n q \mathbf{v}$$

L'impulsion prend la forme:

$$\mathbf{p} = \frac{m}{n q} \mathbf{j} + q \mathbf{A}$$

et le déphasage s'écrit:

$$\theta_D - \theta_C = \int_C^D \frac{m}{n q} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{l} + \int_C^D \frac{q}{\hbar} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

Ainsi le déphasage $\theta_D - \theta_C$ acquis par la fonction d'onde du condensat de paires de Cooper lors d'un déplacement entre deux points C et D est le résultat de la circulation de la densité de courant \mathbf{j} et du potentiel vecteur \mathbf{A} sur le chemin utilisé pour joindre C et D.

III Equation de Schrödinger et densité de courant

III-1 Energie cinétique

En mécanique Lagrangienne classique, l'énergie cinétique reste $\frac{1}{2} m \mathbf{v}^2$, ce qui signifie que l'énergie cinétique d'une particule chargée s'écrit dans un champ électromagnétique:

$$E_c = \frac{1}{2} m (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2$$

III-2 Hamiltonien

L'équation de Schrödinger est l'équation d'évolution de la fonction d'onde. Elle s'écrit:

$$\hat{\mathbf{H}} \psi(\mathbf{r}, t) = i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

où $\hat{\mathbf{H}}$ est opérateur Hamiltonien dont la forme classique $\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ est déduite du Lagrangien $\mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ par la transformation de Legendre:

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}\mathbf{v} - \mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$$

qui prend la forme:

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} m (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) + V$$

et fait naturellement apparaître la somme d'une énergie cinétique et d'une énergie potentielle.

III-3 Equation de Schrödinger

Selon les principes de la mécanique quantique, c'est aux composantes de l'impulsion \mathbf{p} (et non \mathbf{P}) que correspondent les trois opérateurs: $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z}$ que l'on rassemble sous l'opérateur vectoriel $\frac{\hbar}{i} \nabla$.

Aussi l'opérateur Hamiltonien s'écrit:

$$\hat{\mathbf{H}} = \frac{1}{2} m \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right) \cdot \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right) + \hat{V}$$

et prend en l'absence de champ magnétique la forme simplifiée:

$$\hat{\mathbf{H}} = - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \hat{V}$$

III-4 Densité de courants:

Vous n'avez certainement pas oublié l'équation de conservation des charges électriques. Sous sa forme locale, elle s'écrit:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho_c}{\partial t} = 0$$

où \mathbf{j} est le vecteur densité de courant électrique

ρ_c est la densité de charge.

Sous sa forme intégrale, elle signifie que l'augmentation de charge par unité de temps dans un volume délimité par une surface fermée est égale à la somme algébrique des flux de courant à travers ladite surface.

La loi de conservation de la matière s'écrit de façon semblable:

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

où ρ est la probabilité de présence et \mathbf{J} le vecteur densité de courant de probabilité de présence.

$$\rho(\mathbf{r},t) = \psi^*(\mathbf{r},t) \psi(\mathbf{r},t)$$

dont la dérivée partielle par rapport au temps s'écrit:

$$\frac{\partial (\psi^* \psi)}{\partial t} = \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t}$$

En tenant compte de l'équation de Schrödinger et de son complexe conjugué:

$$\hat{\mathbf{H}} \psi(\mathbf{r},t) = i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad \text{et} \quad (\hat{\mathbf{H}} \psi(\mathbf{r},t))^* = -i \hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t}$$

on montre sans difficulté que:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{i \hbar} \left[\psi (\hat{\mathbf{H}} \psi)^* - \psi^* \hat{\mathbf{H}} \psi \right] = \operatorname{div} \left\{ \psi^* \frac{\hbar i \nabla - q\mathbf{A}}{m} \psi \right\}$$

ce qui permet de définir la densité de courant de probabilité de présence comme:

$$\mathbf{J} = \operatorname{Re} \left\{ \psi^* \frac{\hbar i \nabla - q\mathbf{A}}{m} \psi \right\}$$

et la densité de courant électrique:

$$\mathbf{j} = \operatorname{Re} \left\{ \psi^* \frac{\hbar i \nabla - q\mathbf{A}}{m} \psi \right\} q$$

IV Equation de London

IV-1 Densité de courant

Si on reprend la fonction d'onde qui décrit le condensât du supraconducteur:

$$\psi(\mathbf{r},t) = \sqrt{n}(\mathbf{r},t) \exp i\theta(\mathbf{r},t)$$

La densité de courant de probabilité fait place à la densité de courant.

Si l'on se place dans l'hypothèse d'une densité de paires de Cooper uniforme ($n=cste$) le calcul de la densité de courant conduit à:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = n q \frac{\hbar}{m} \left(\nabla \theta(\mathbf{r},t) - \frac{q}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{r},t) \right)$$

Et en prenant son rotationnel:

$$\operatorname{rot} \mathbf{j} = -\frac{n q^2}{m} \mathbf{B}$$

qui n'est autre que la deuxième équation de London.

IV-2 Retour sur les jauges

Comparée à l'équation du paragraphe du chapitre 2, la phase $\theta(\mathbf{r},t)$ remplace la constante d'intégration dont on a vu qu'elle correspondait à un changement de jauge.

Aussi, changer de jauge, c'est faire un changement de phase de la fonction d'onde.

Mais attention ce n'est pas aussi trivial qu'il paraît car le changement de phase n'est pas uniforme; il est différent en chaque point de l'espace.

V Quantification du flux

V-1 Supraconducteur connexe

Considérons un chemin fermé à l'intérieur d'un supraconducteur. En présence de champ magnétique, le déphasage de la fonction d'onde associée à une paire de Cooper sur un chemin fermé s'écrit:

$$\delta \theta_{C \rightarrow C} = \oint_{(0)} \frac{m}{n q \hbar} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{l} + \oint_{(0)} \frac{q}{\hbar} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 2 \pi s$$

Si le supraconducteur est simplement connexe, c'est à dire sans trou qui débouche en deux endroits distincts de la surface, on peut imaginer une succession de circuits (1), (2), (3) etc... infiniment proches les uns des autres qui amènent progressivement du circuit original (1) à un circuit qui serait composé du point A lui-même et pour lequel la différence de phase $\delta \theta_{A \rightarrow A}$ serait de toute évidence nulle. ($s=0$)

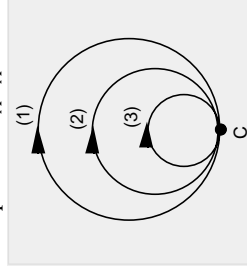


Figure 2

Circuit fermé dans un supraconducteur simplement connexe.
Tout circuit est homotope à un point

On ne voit pas alors comment un changement de phase de 2π viendrait se loger lors de l'agrandissement continu de la boucle.

Il n'est d'autre solution que d'admettre que dans un tel supraconducteur:

$$\oint \mathbf{p} \, d\mathbf{l} = 0 \text{ pour tout circuit.}$$

Cela signifie que \mathbf{p} est un gradient. Puisque:

$$\mathbf{p} = \frac{m}{nq} \mathbf{j} + q\mathbf{A}$$

On retrouve:

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{m} (\nabla\theta(\mathbf{r}) - \frac{q}{\hbar} \mathbf{A}) \rho$$

La jauge de London correspond à $\theta = \text{cste}$, soit:

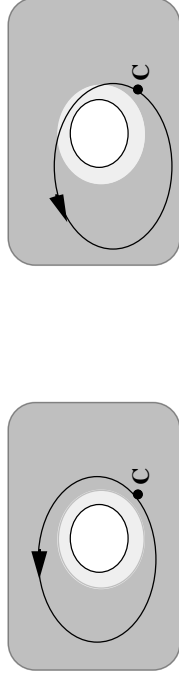
$$\mathbf{p} = \mathbf{0}$$

Le raisonnement se rencontre dans l'étude des fonctions holomorphes: 2 lacets sont homotopes dans un domaine Ω si on peut passer de l'un à l'autre de façon continue sans sortir de Ω . Dans un domaine simplement connexe, tout lacet est homotope à un point.

(Voir Petit: outil mathématique p 192)

V-2 Supraconducteur non simplement connexe

Considérons un morceau de supraconducteur non simplement connexe, c'est à dire percé d'un trou (en blanc sur la figure) et soumis à un champ magnétique \mathbf{B}^0 .



(a) Figure 3: Circuits entourant un trou dans le supraconducteur
(a) bien au delà de la zone de London
(b) en empiétant sur la zone de London

La partie grisée claire est la partie "Meissner" du supraconducteur dans laquelle circule un courant \mathbf{j} et règne un champ magnétique \mathbf{B} . \mathbf{B} et \mathbf{j} s'amortissent exponentiellement de la surface vers l'intérieur du supraconducteur.

Quel que soit le chemin suivi dans le supraconducteur:

$$\oint_{C \rightarrow C} \frac{m}{nq} \mathbf{j} \, d\mathbf{l} + \oint_{(0)} \frac{q}{\hbar} \mathbf{A} \, d\mathbf{l} = 2 \pi \hbar$$

qui n'est plus nécessairement égal à 0 car le circuit n'est pas homotope à un point.

Le cas particulièrement intéressant est celui où le circuit est suffisamment ample pour éviter la zone de London et ne rencontrer aucun courant. Dans ce cas la relation de déphasage s'écrit:

$$\oint_{(C)} \frac{q}{\hbar} \mathbf{A} \, d\mathbf{l} = 2\pi \hbar$$

Or la circulation de \mathbf{A} sur un circuit est égale au flux du champ \mathbf{B} à travers toute surface qui s'appuie sur le circuit:

$$\oint \mathbf{B} \, d\mathbf{S} = s \frac{2\pi \hbar}{q} = s \Phi_0$$

Le flux à travers une surface fermée entourant un trou et appuyée sur une boucle suffisamment ample pour éviter l'épaisseur de Meissner est un nombre entier de fluxons

$$\Phi_0 = \frac{\hbar}{q} = \frac{h}{2e}$$

V-3 Preuve expérimentale des paires de Cooper

La longueur de London:

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n q^2}}$$

ne permettait pas de mettre en évidence le groupement des électrons. En effet, en multipliant dans la relation ci-dessus la masse et la charge des particules par 2 et en divisant simultanément leur densité par 2 la longueur de London reste inchangée.

Le fluxon au contraire prend une valeur toute autre selon que les particules à prendre en considération sont les électrons individuels ou les paires de Cooper.

V-4 Retour sur les vortex

Considérons un vortex tel qu'il est représenté à la figure 19 du chapitre V et un circuit qui entoure largement la zone de London du vortex. Ce circuit qui ne rencontre pas de densité de courant \mathbf{j} (qui chute à 0 sur quelques λ), se trouve traversé par l'ensemble du champ magnétique associé au vortex. Le flux de ce champ est donc nécessairement un nombre entier de fluxons. Nous verrons plus loin sur des arguments énergétiques que chaque vortex porte un fluxon et un seul.

VI Effets Josephson

VI-1 Fonction d'onde d'une particule dans un système couplé

Considérons deux systèmes (1) et (2), très éloignés l'un de l'autre.

Sans plus de précision, on peut dire que située dans (1) et au niveau d'énergie E_1 , une particule est décrite par la fonction $\varphi_1(\mathbf{r})$ alors que si elle est située dans (2) et au

niveau d'énergie E_2 , elle est décrite par $\varphi_2(\mathbf{r})$, les fonctions $\varphi_1(\mathbf{r})$ et $\varphi_2(\mathbf{r})$ ne se recouvrent pas. Ces fonctions possèdent manifestement la propriété d'être normées.



Figure 4 Fonctions d'onde dans deux blocs séparés

Cela signifie aussi que si on se limite à ces deux états: être dans (1) avec l'énergie E_1 ou être dans (2) avec l'énergie E_2 , on peut considérer que $\varphi_1(\mathbf{r})$ et $\varphi_2(\mathbf{r})$ forment une base dans laquelle toute fonction d'onde peut se développer. Si $c_1(0)$ et $c_2(0)$ sont les coefficients du développement à l'instant $t=0$, on a:

$$\psi(\mathbf{r}, t=0) = c_1(0) \varphi_1(\mathbf{r}) + c_2(0) \varphi_2(\mathbf{r})$$

où la probabilité de trouver la particule dans (1) est $|c_1(0)|^2$ et celle de la trouver dans (2) est $|c_2(0)|^2$.

L'évolution temporelle de la fonction d'onde et des probabilités de présence dans chaque case est donnée par l'équation de Schrödinger:

$$\hat{H}\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

En représentation matricielle dans la base (φ_1, φ_2) , \hat{H} et ψ s'écrivent:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} E_1 & K \\ K & E_2 \end{pmatrix} \quad \psi = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$$

avec:

$$E_1 = \langle \varphi_1 | H | \varphi_1 \rangle \quad K = \langle \varphi_1 | H | \varphi_2 \rangle \quad c_1 = \langle \varphi_1 | \psi \rangle$$

et l'équation de Schrödinger prend la forme:

$$\begin{pmatrix} E_1 & K \\ K & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$$

En fait, si les 2 boîtes sont très éloignées et que tout transfert de particules de l'une à l'autre est exclu, il n'est d'autre solution que de faire $K=0$. Dans cette hypothèse:

$$c_1(t) = c_1(0) \exp\left(-i\frac{E_1}{\hbar}t\right) \quad \text{et} \quad c_2(t) = c_2(0) \exp\left(-i\frac{E_2}{\hbar}t\right)$$

Les probabilités de présence dans (1) et dans (2) restent constantes.

VI-2 Fonction d'onde d'un condensât dans un système couplé

Pour rendre compte du comportement de N particules de même état quantique, il faut a priori multiplier la fonction d'onde par \sqrt{N} , ce qui apportera le facteur N dans les probabilités de présence, soit:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{N} c_1(t) \varphi_1(\mathbf{r}) + \sqrt{N} c_2(t) \varphi_2(\mathbf{r})$$

$\varphi_1(\mathbf{r})$ et $\varphi_2(\mathbf{r})$ étant normalisées, l'amplitude de probabilité de présence dans la case (1) est $\sqrt{N} c_1(t)$ qui est un nombre complexe que l'on peut a priori écrire: $\sqrt{n_1} e^{i\theta_1(t)}$, θ indépendant de la position dans la boîte est compatible avec la jauge de London.

La fonction d'onde s'écrit alors:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{n_1} e^{i\theta_1(t)} \varphi_1(\mathbf{r}) + \sqrt{n_2} e^{i\theta_2(t)} \varphi_2(\mathbf{r})$$

qui est identique à la fonction d'onde à une particule où:

$$c_1(t) \rightarrow \sqrt{n_1} e^{i\theta_1(t)} \quad \text{et} \quad c_2(t) \rightarrow \sqrt{n_2} e^{i\theta_2(t)}$$

$\sqrt{n_1} e^{i\theta_1(t)}$ et $\sqrt{n_2} e^{i\theta_2(t)}$ obéissent aux équations couplées écrites plus haut pour $c_1(t)$ et $c_2(t)$.

VI-3 Deux blocs supraconducteurs couplés

Considérons 2 blocs supraconducteurs: le premier porté à un potentiel électrique $V/2$, le second porté au potentiel électrique $-V/2$.

Si les deux blocs sont par ailleurs identiques, on a:

$$E_1 = E_0 + \frac{qV}{2} \quad \text{et} \quad E_2 = E_0 - \frac{qV}{2}$$

Et pour simplifier les équations, prenons $E_0 = 0$ comme énergie de référence, ce qui conduit à:

$$E_1 = +\frac{qV}{2} \quad \text{et} \quad E_2 = -\frac{qV}{2}$$

La résolution de l'équation de Schrödinger sous sa forme matricielle en prenant comme fonction d'onde la forme indiquée plus haut conduit à:

$$\frac{dn_1}{dt} = \frac{2}{\hbar} K \sqrt{n_1 n_2} \sin(\theta_2 - \theta_1) \quad \frac{dn_2}{dt} = -\frac{dn_1}{dt}$$

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{n_2}{n_1}} \cos(\theta_2 - \theta_1) - \frac{qV}{2\hbar}$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} \cos(\theta_2 - \theta_1) + \frac{qV}{2\hbar}$$

VI-4 Effet Josephson continu

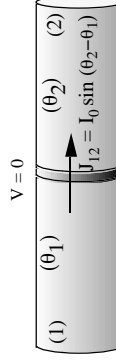


Figure 5

Effet Josephson continu: en l'absence de différence de potentiel, un courant circule du bloc (1) au bloc (2)

Plaçons nous dans le cas où $V=0$, sans différence de potentiel entre les deux blocs.

Le nombre de particules passant de 1 à 2 pendant l'unité de temps, c'est-à-dire le flux de 1 à 2, correspond à la diminution du nombre de particules dans la case 1 et son augmentation dans la case 2 soit:

$$J_{1 \rightarrow 2} = -\frac{dn_1}{dt} = -\frac{2}{\hbar} K \sqrt{n_1 n_2} \sin(\theta_2 - \theta_1)$$

L'appauvrissement étant très limité, $\sqrt{n_1 n_2}$ est pratiquement une constante. Il s'ensuit un courant électrique:

$$I_{1 \rightarrow 2} = I_0 \sin(\theta_2 - \theta_1)$$

Ce courant dépend de la différence de phase entre les fonctions d'onde des 2 condensâts. Il s'écoule en l'absence de différence de potentiel. C'est ce que l'on appelle courant Josephson continu.

Il faut bien comprendre que I_0 est le courant maximum qui peut s'écouler en régime supraconducteur et en l'absence de différence de potentiel entre les blocs.

VI -5 Interdépendance de la phase et du courant

Si, dans un circuit, le supraconducteur se voit imposer un courant i inférieur à I_0 , la différence de phase entre les deux blocs s'ajuste pour que la relation ci-dessus soit satisfaite. Le courant i à travers la jonction est un courant supraconducteur qui circule sans dissipation; aucune différence de potentiel n'apparaît aux bornes de la jonction.

Reste à savoir quelle différence de phase va être adoptée puisque le même courant est attendu pour $\delta\theta = (\theta_2 - \theta_1)$ et pour $\delta\theta = \pi - (\theta_2 - \theta_1)$, et ceci à 2π près!

Un argument énergétique montre que la différence de phase adoptée est comprise entre $-\pi/2$ et $\pi/2$.

En effet, imaginons une jonction dans laquelle ne passe aucun courant et reions-la pendant un temps Δt à un générateur présentant une différence de potentiel V . Un courant $i(t)$ s'installe de telle sorte que, à tout moment:

$$i = I_0 \sin \delta\theta \\ V = \frac{\hbar}{q} \frac{d}{dt} (\delta\theta)$$

Le travail fourni par le générateur est:

$$W = \int_0^{\Delta t} V i(t) dt = \frac{I_0 \hbar}{q} [1 - \cos \delta\theta]$$

W est d'une façon ou d'une autre l'énergie accumulée dans la jonction. Pour un même courant i établi dans la jonction (donc un même $\sin \delta\theta$), le travail minimum à fournir correspond à $\cos \delta\theta$ le plus grand, soit $\pi/2 < 0 < -\pi/2$. Ainsi la différence de phase qui s'installe est comprise entre $-\pi/2$ et $\pi/2$.

VI - 6 Courant Limite de la jonction

Si un courant i supérieur à I_0 est imposé, la jonction perd sa nature supraconductrice. Cela se traduit par l'apparition d'une différence de potentiel entre les blocs et des processus dissipatifs; la jonction acquiert une résistance ohmique R et on a $V=RI$.

Cela signifie aussi qu'il n'y a plus de continuité supraconductrice et que l'on ne dispose plus d'un anneau supraconducteur fermé. Le champ magnétique peut s'engouffrer par ce "pont normal".

I_0 est une caractéristique importante de la jonction. Il dépend de sa surface, de son épaisseur, de ses qualités cristallines etc.

VI-7 Effet Josephson alternatif

Introduisons une différence de potentiel V différente de 0 entre les deux blocs supraconducteurs.

L'intensité du courant Josephson reste:

$$I_{1 \rightarrow 2} = I_0 \sin(\theta_2 - \theta_1)$$

Mais maintenant, la différence de phase obéit à l'équation:

$$\frac{d}{dt} (\theta_2 - \theta_1) = \frac{qV}{\hbar}$$

et varie linéairement avec le temps:

$$(\theta_2 - \theta_1)(t) = \frac{qV}{\hbar} t + (\theta_2 - \theta_1)(0)$$

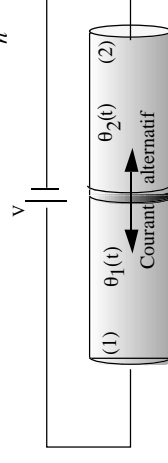


Figure 6

Effet Josephson alternatif:
en présence d'une tension continue,
un courant alternatif traverse la
jonction

et le courant Josephson:

$$I = I_0 \sin \left(\frac{qV}{\hbar} t + (\theta_2 - \theta_1)(0) \right)$$

est un courant alternatif de pulsation:

$$\omega = \frac{qV}{\hbar}$$

égale à $\omega = 3 \cdot 10^9$ Hz par μV .

C'est un signal de haute fréquence qui peut facilement passer inaperçu si on ne prend garde. C'est ce qui se passe lorsqu'on regarde la caractéristique courant-tension avec un oscilloscope qui ne peut suivre en fréquence et moyenne à 0 la composante alternative.

Ainsi si un courant continu s'écoule en l'absence même de différence de potentiel, une différence de potentiel continu conduit à un courant alternatif.

VI-8 Effets de résonance

Superposons à la différence de potentiel continu V entre les deux blocs une composante alternative v cosot. L'équation d'évolution de la différence de phase devient:

$$\frac{d}{dt}(\theta_2 - \theta_1) = \frac{qV}{\hbar} + \frac{q}{\hbar} v (\cos \omega t + \varphi)$$

$$\delta\theta(t) = \frac{qV}{\hbar} t + \frac{qV}{\omega \hbar} \sin(\omega t + \varphi) + \delta\theta_0$$

Le courant i s'écrit:

$$i = I_0 \sin\left(\frac{qV}{\hbar} t + \frac{qV}{\omega \hbar} \sin(\omega t + \varphi) + \delta\theta_0\right)$$

Considérons l'exponentielle imaginaire et on reviendra au sinus en prenant la partie imaginaire:

$$\exp i \left[\frac{qV}{\omega \hbar} \sin(\omega t + \varphi) + \frac{qV}{\hbar} t + \delta\theta_0 \right] = \exp i \left[\frac{qV}{\hbar} t + \delta\theta_0 \right] \exp i \left[\frac{qV}{\omega \hbar} \sin(\omega t + \varphi) \right]$$

Et avec la relation:

$$\exp(i C \sin x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n(C) \exp(inx) \quad (\text{Formule de Schömilch})$$

$$= \exp i \left[\frac{qV}{\hbar} t + \delta\theta_0 \right] \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n\left(\frac{qV}{\omega \hbar}\right) \exp(i n \omega t + n \varphi)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n\left(\frac{qV}{\omega \hbar}\right) \exp i \left[\left(\frac{qV}{\hbar} + n \omega\right) t + n \varphi + \delta\theta_0 \right]$$

Et en revenant au courant, $e=$ remplaçant n par $-n$ et en se souvenant que:

$$J_{-n} = (-1)^n J_n$$

$$i = I_0 \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^n J_n\left(\frac{qV}{\omega \hbar}\right) \sin\left[\left(\frac{qV}{\hbar} - n \omega\right) t - n \varphi + \delta\theta_0\right]$$

Le point remarquable est que ω étant donné, il apparaît pour chaque valeur V_n de V telle que:

$$\left(\frac{qV_n}{\hbar} - n \omega\right) = 0, \text{ soit } V_n = \frac{n \hbar \omega}{q}$$

une composante continue qui s'écrit:

$$(-1)^n J_n\left(\frac{qV}{\omega \hbar}\right) \sin[-n \varphi + \delta\theta_0]$$

VIII Mise en évidence expérimentale

VIII-1 Courant tunnel dans une jonction idéale

La figure reproduit la caractéristique courant-tension d'une jonction tunnel idéale à température nulle, telle qu'on peut la faire apparaître sur un oscilloscope.

A $V=0$, on observe un courant compris entre $+I_0$ et $-I_0$. Il s'agit du courant Josephson continu décrit plus haut. I_0 va dépendre du matériau et de la géométrie de la jonction. I_0 prend typiquement des valeurs comprises entre $1\mu A$ et $10 mA$.

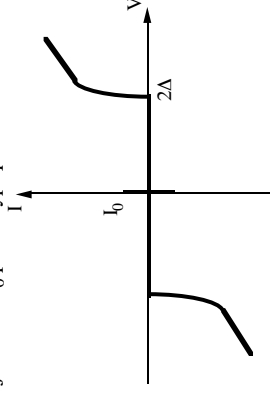


Figure 2:

Caractéristique courant-tension d'une jonction Josephson vue à l'oscilloscope

$$I_0 \sim 1 mA$$

$$2\Delta \sim 1-10 meV$$

Entre $V=0$ et $V = 2\Delta$, le courant apparaît comme $I = 0$. En fait il s'agit d'un courant de très haute fréquence, qui pour l'oscilloscope se moyenne à 0.

2Δ est lié à la température de transition T_c et vaut typiquement $2\Delta = 3.5 kT_c$, ce qui lui confère des valeurs de quelques meV pour les anciens supra, à quelques dizaines de meV pour les supraconducteurs Hauts T_c .

En se souvenant que la fréquence du courant continu est $\omega = 3 \cdot 10^9$ Hz par μV , il est compréhensible que, à cette échelle, on ne voie pas apparaître la composante alternative.

A partir de 2Δ un nouveau phénomène se produit. Il est inexplicable dans le cadre de l'effet tunnel de paires et correspond au passage d'électrons individuels provenant de paires brisées et 2Δ est l'énergie qu'il faut fournir à une paire pour la briser. Au-delà de 2Δ , le courant tunnel n'est plus celui de paires de Cooper, mais celui d'électrons individuels que on appelle quasi-particules. Il est traité en détail au chapitre XII

VIII-2 Courant à travers une jonction à impédance non nulle

Dans le paragraphe précédent, nous avons admis implicitement que tous les électrons de conduction étaient appariés et formaient des paires de Cooper, du moins tant que $V < 2\Delta$.

En fait, les choses sont plus complexes car à température non nulle, tous les électrons libres ne sont pas appariés. Dans un modèle simple à deux fluides, 2 populations d'électrons coexistent: les électrons "supraconducteurs" de densité n_s et les électrons normaux n_n . La densité d'électrons normaux croît avec la température, par dissociation thermique des paires.

A $V=0$, les électrons normaux ne jouent aucun rôle, car ils sont résistifs et il n'y a pas de champ pour assurer leur déplacement. Lorsque V croît, il apparaît un courant normal $I_n = GV$ proportionnel à la tension, où G est la conductance de la jonction (inverse de la résistance).

La jonction réelle présente un schéma équivalent, comprenant en parallèle une jonction idéale parcourue par le courant $I_n = I_0 \sin \delta\theta(t)$ où $\delta\theta(t) = \frac{qV}{\hbar} t + \delta\theta(0)$ et une conductance G (résistance $1/R$) parcourue par le courant $I_n = GV$.

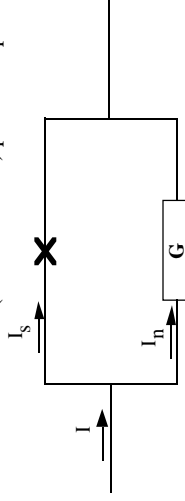


Figure 8

Circuit équivalent d'une jonction tunnel à conductance non nulle

La caractéristique courant-tension est profondément modifiée, particulièrement en dessous de 2Δ , où on voit apparaître un courant normal $I_n = GV$ qui se superpose au courant alternatif de paire qui, lui, se moyenne à 0.

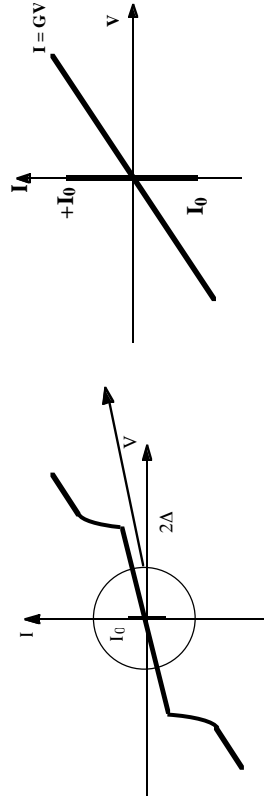
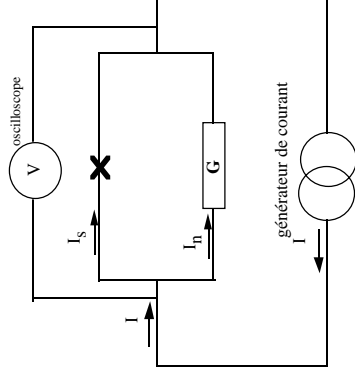


Figure 9: Caractéristique courant-tension d'une jonction avec conductance vue à l'oscilloscope

VIII-3 Caractéristique d'une jonction avec source de courant

Envisageons le cas où la jonction est connectée à une source de courant I . La tension est mesurée par un oscilloscope. Le montage expérimental et la caractéristique sont représentés sur les figures ci-dessous. La caractéristique se décrit en suivant les flèches de la figure.



Montage expérimental et circuit équivalent

Figure 10: Jonction alimentée par une source de courant

Caractéristique courant tension

Au départ $V=0$ et on fait croître I . Tant que I reste inférieur à I_0 les courants supraconducteurs assurent le passage du courant et V reste nul.

Pour dépasser I_0 , il n'y a plus d'autre moyen que de mettre à contribution les électrons normaux, qui peuvent assurer un courant $I_n = I_0$ à condition de faire apparaître une tension $V = GI_0$ aux bornes de la jonction. On observe donc un saut de tension à I_0 . Les électrons supraconducteurs contribuent au courant par une composante alternative de très haute fréquence, qui se moyenne à 0.

Au-delà de I_0 les électrons normaux continuent à assurer le transport du courant continu, alors que le courant supraconducteur donne une composante de fréquence de plus en plus élevée.

Au retour, c'est-à-dire lorsqu'on diminue le courant, la tension décroît linéairement jusqu'à 0 et on ne voit apparaître aucun courant supraconducteur tant que V n'atteint pas 0.

VIII-3 Caractéristique plus réaliste

En fait le comportement décrit ci dessus doit être un peu nuancé en raison de l'effet condensateur de la jonction.

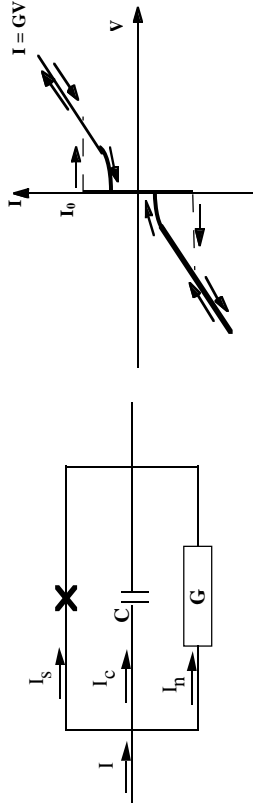


Figure 11. Jonction alimentée par une source de courant avec circuit équivalent à composante capacitive

Le circuit équivalent avec condensateur en parallèle a pour effet de modifier la partie retour de la caractéristique courant-tension, qui ne rejoint plus linéairement le point (0,0).

La caractéristique de la jonction peut être mise en équation avec un ensemble d'équations non linéaires couplées:

$$I = I_s + I_G + I_C \quad I_s = I_0 \sin \theta \quad I_G = GV \quad I_C = C dV/dt$$

avec:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{qV}{\hbar}$$

ce qui conduit à l'équation maîtresse que l'on rencontre dans tous les ouvrages:

$$I = \frac{\hbar C}{q} \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{\hbar G}{q} \frac{d\theta}{dt} + I_0 \sin \theta$$

et à partir de laquelle on rend compte, avec différentes valeurs des paramètres, du comportement de la tension moyenne:

$$\left\langle \frac{dV}{dt} \right\rangle = \frac{\hbar}{q} \left\langle \frac{d\theta}{dt} \right\rangle$$

La caractéristique s'avère dépendre du paramètre réduit $\beta = \frac{q I_c}{\hbar G^2}$.

Caractéristique d'une jonction soumise à une haute fréquence

En l'absence de condensateur, $\beta = \infty$, l'intensité est la superposition du courant normal $I_n = GV$ et d'un courant supraconducteur de paire qui apparaît à chaque $V = \frac{n \hbar \omega}{q}$. Ce courant de paire dépend de la phase et est représenté par des traits

verticaux d'amplitude $2 J_n \left(\frac{qV}{\hbar \omega} \right)$

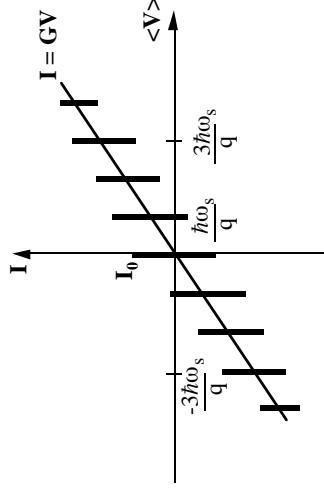


Figure 12

caractéristique d'une jonction Josephson alimentée par une tension continue $\langle V \rangle$ que l'on balaye à laquelle est superposée une composante alternative faible de fréquence ω_s

La caractéristique en générateur de courant, se présente alors comme des marches d'escalier, que l'on comprend aisément en généralisant la description du paragraphe VIII-3. Ce comportement porte le nom de "steps de Shapiro".

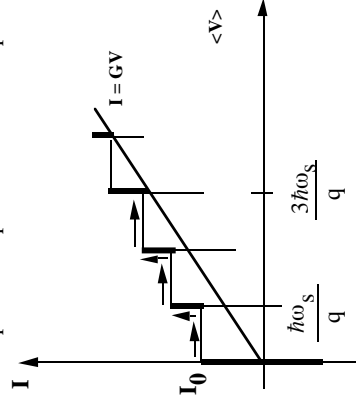


Figure 13

Caractéristique plus réaliste d'une jonction Josephson alimentée par une tension continue $\langle V \rangle$ que l'on balaye à laquelle est superposée une composante alternative faible de fréquence ω_s .

Les marches sont appelées "steps" de Shapiro

IX-SQUID

IX-1 Les jonctions faibles

Dans la jonction idéalisée, une couche mince uniforme isolante est placée entre les deux blocs de supraconducteur.

On obtient un comportement identique en effectuant un simple rétrécissement d'un filament supraconducteur ou en effectuant une soudure sale (oxydée) entre deux filaments.

On appelle ces jonctions des jonctions faibles [BUC-p 277]. (Voir par exemple les microsquids)

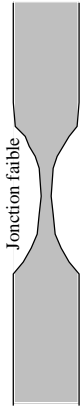


Figure 14

Un simple pincement de filament supraconducteur constitue une jonction faible qui se comporte comme une jonction Josephson

IX-2 les trois bonnes raisons de présenter un déphasage

Considérons le fil supraconducteur CD avec entre les points M et N une jonction faible. dans le cas général, ce fil est le siège d'une densité de courant \mathbf{j} et se trouve plongé dans un potentiel vecteur \mathbf{A} .

Le déphasage $\theta_D - \theta_C$ en ses extrémités est dû à la circulation du vecteur d'onde sur le fil et à la présence de la jonction. Or le vecteur d'onde \mathbf{k} est la somme de deux termes:

$$\mathbf{k} = \frac{m}{\hbar} \mathbf{j} + \frac{q}{\hbar} \mathbf{A}$$

Si bien qu'il y a trois bonnes raisons d'introduire un déphasage entre C et D:

$$\delta\theta_{CD} = \delta\theta_{CD}^{courant} + \delta\theta_{CD}^{pot\ vect} + \delta\theta_{LM}^{jonction}$$

avec:

1) - Déphasage dû à la circulation de la densité de courant:

$$\delta\theta_{CD}^{courant} = \frac{m}{\hbar} \int_C^D \mathbf{j} \cdot d\mathbf{l}$$

2) - Déphasage dû à la circulation du potentiel vecteur:

$$\delta\theta_{CD}^{pot\ vect} = \frac{q}{\hbar} \int_C^D \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

3) - Déphasage dû à la présence d'une jonction faible:

$$\delta\theta_{LM}^{jonction} = \sin^{-1} \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

IX-3 SQUID à 1 "jonction à très faible courant"

Considérons la boucle supraconductrice de la figure 7.

Elle est composée d'un fil supraconducteur se refermant sur lui-même en formant entre ses extrémités une jonction faible. Les points C et D sont infiniment voisins, de part et d'autre de la jonction.

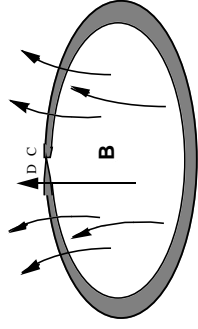


Figure 15

Circuit SQUID à une jonction

SQUID = Superconductor QUantum Interference Device

Un tel système est appelé SQUID (Superconductor QUantum Interference Device). Il tient son nom au fait que le courant qui y circule est lié au rapport entre le flux de champ magnétique à travers le circuit et le quantum de flux Φ_0 introduit précédemment. C'est d'ailleurs ce que nous allons déterminer maintenant.

Le mot interference prend son sens dans les dispositifs à 2 jonctions que nous verrons dans le prochain paragraphe et qui ont constitué la première génération de SQUID.

La différence de phase entre le point C et le même point C après avoir fait un tour de circuit présente les trois origines évoquées ci-dessus et puisque origine et extrémité sont confondues, ce doit être un nombre entier de fois 2π .

$$\delta\theta_{CD}^{courant} + \delta\theta_{CD}^{magn} + \delta\theta_{jonct} = 2n\pi$$

Dans ce SQUID simple, la jonction présente une caractéristique essentielle: son courant limite I_0 est très faible.

Cela aura une double conséquence:

- i) le courant circulant dans l'anneau induira un flux négligeable
- ii) le déphasage dû au courant sera négligeable.

Voyons successivement les trois termes:

Déphasage dû au courant.

Il peut s'écrire comme la circulation de \mathbf{j} sur le circuit fermé dans la mesure où les points C et D sont infiniment proches de part et d'autre de la jonction.

Selon notre hypothèse, I_0 est très faible ce qui limite \mathbf{j} , qui dans tous les cas, s'avère être suffisamment faible pour que le terme $\delta\theta_{CD}^{courant}$ soit négligeable :

$$\delta\theta_{courant} = \frac{m}{nq\hbar} \oint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{l} \approx 0$$

Déphasage dû au champ

S'écrit comme la circulation de \mathbf{A} le long du fil et donc comme la flux de \mathbf{B} à travers toute surface s'appuyant sur ce circuit:

$$\delta\theta^{\text{magn}} = \frac{q}{\hbar} \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{q}{\hbar} \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 2\pi \frac{\phi}{\phi_0}$$

Vu la définition du quantum de flux ϕ_0 , c'est 2π fois le rapport entre le flux du champ magnétique à travers le circuit et le quantum de flux.

ϕ est le flux total à travers le circuit, c'est-à-dire le flux extérieur ϕ_{ext} plus le flux du champ créé par le courant I qui circule dans l'anneau qui se trouve égal à $L I$:

$$\phi = \phi_{\text{ext}} + L I$$

Mais de nouveau, I est au maximum égal à I_0 et $L I$ est négligeable devant ϕ_{ext} .

Déphasage aux bornes de la jonction

Le déphasage le long du circuit étant imposé par ϕ_{ext} et donc \mathbf{B}_{ext} , le déphasage à la jonction se trouve dicté par l'équation qui stipule que le déphasage total doit être un multiple de 2π :

$$\delta\theta^{\text{tct}} = 2n\pi - 2\pi \frac{\phi}{\phi_0} = 2n\pi - 2\pi \frac{\phi_{\text{ext}}}{\phi_0} = 2\pi \left(n - \frac{\phi_{\text{ext}}}{\phi_0} \right)$$

Pour réaliser ce déphasage, le courant i s'ajuste et le fait de telle sorte que la valeur absolue de $\delta\theta^{\text{jonct}}$ est minimale.

$$i = I_0 \sin \delta\theta^{\text{jonct}}$$

IX-4 Fonctionnement du SQUID à une jonction

i) Au départ \mathbf{B}_{ext} est nul, $\phi_{\text{ext}} = 0$, $\delta\theta^{\text{jonct}} = 0$ et $i = I_0$

ii) Faisons croître \mathbf{B} .

Si l'on s'en tient au comportement de l'anneau supraconducteur du paragraphe X, un courant i s'ajuste pour empêcher le champ magnétique de pénétrer dans l'anneau.

Ceci, le circuit tente de le réaliser, mais il s'avère très rapidement que le courant i nécessaire à l'écrantage dépasse I_0 qui par construction est très faible.

La jonction perd sa qualité supraconductrice et le champ magnétique peut pénétrer dans l'anneau. (qui n'est plus un anneau fermé supraconducteur!). Le champ "s'engouffre" jusqu'à ce que le courant i devienne inférieur à I_0 .

Pratiquement, puisque I_0 est très faible, la jonction retrouve sa qualité supraconductrice lorsque le flux à travers l'anneau supraconducteur est égal au flux ϕ_{ext} que présenterait le champ magnétique extérieur à travers tout autre circuit.

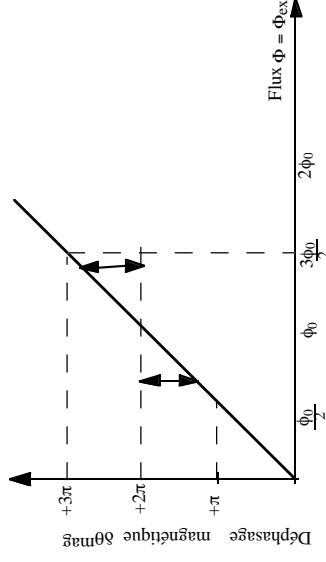
Est ce dire que tout se passe comme si le circuit était normal?

Du point de vue du flux ϕ qui le traverse : oui puisqu'il est pratiquement ϕ_{ext}

Mais le système retrouvant la propriété de blocage de phase, un courant faible i s'ajuste de telle sorte que:

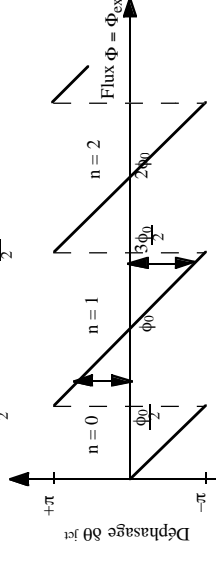
$$i = I_0 \sin \delta\theta^{\text{jonct}} \quad \delta\theta^{\text{jonct}} = 2n\pi - 2\pi \frac{\phi}{\phi_0} = 2\pi \left(n - \frac{\phi_{\text{ext}}}{\phi_0} \right)$$

Figure I6-a



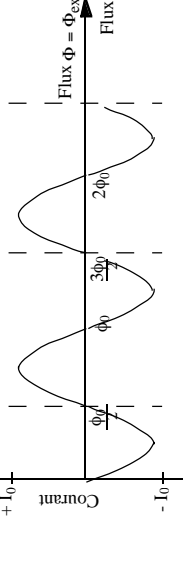
Evolution du déphasage magnétique en fonction du flux du champ magnétique dans l'anneau à 1 jonction Josephson

Figure I6-b



Evolution du déphasage de jonction en fonction du flux du champ magnétique

Figure I6-c



Courant circulant dans le circuit

C'est donc un comportement assez subtil.

Le flux à travers l'anneau SQUID ne représente pas un nombre entier de quantum de flux, mais le déphasage introduit par une circulation d'un tour est 2π .

Avec les orientations indiquées sur la figure, **B** dirigé vers l'avant, $\delta\theta_{mag} = 2\pi \phi/\phi_0$. Il s'ensuit un courant de A vers C dans la jonction et circulant dans le sens positif de C vers A dans le circuit.

i croît avec ϕ et lorsque ϕ atteint $\phi_0/2$, $\delta\theta_{jct}$ atteint π et le courant prend sa valeur maximale i_0 .

Lorsque **B** croît et que ϕ dépasse $\phi_0/2$, plutôt que de voir $\delta\theta_{jct}$ dépasser π , le système réagit en faisant croître n d'une unité, de 0 à n=1. Cela a pour effet de faire passer $\delta\theta_{jct}$ la valeur $-\pi+\epsilon$. Le courant décroît, comme il le ferait d'ailleurs si $\delta\theta_{jct}$ passait à $\pi+\epsilon$.

IX-5 Anneau à deux jonctions

Imaginons un anneau (celui-ci est rectangulaire...) présentant deux jonctions très faibles, c'est-à-dire ne pouvant supporter qu'un très petit courant I_0 .

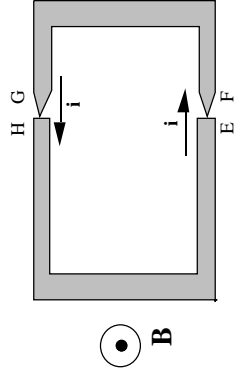


Figure 17

Anneau SQUID à 2 jonctions

Le raisonnement précédent peut être repris mot pour mot sauf que $\delta\theta_{jct}$ se répartit sur les 2 jonctions EF et HG:

$$\delta\theta_{jct} = \delta\theta_{EF}^{jct} + \delta\theta_{HG}^{jct}$$

Le courant i et les déphasages de jonction sont liés par la relation:

$$i = I_{0,EF} \sin \delta\theta_{EF}^{jct} = I_{0,HG} \sin \delta\theta_{HG}^{jct}$$

Et si on admet que les deux jonctions ont le même I_0 ,

$$\delta\theta_{EF}^{jct} = \delta\theta_{HG}^{jct} = \frac{\delta\theta_{jct}}{2}$$

Voir description à la figure 18. Comme on peut le voir à la figure 18-d, le courant subit des discontinuités chaque fois que le flux du champ magnétique atteint un nombre demi-entier de fluxons.

Figure 18-a

Evolution du déphasage magnétique en fonction du flux du champ magnétique dans l'anneau à 1 jonction Josephson

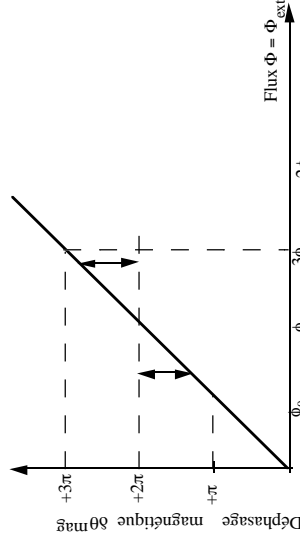


Figure 18-b

Evolution du déphasage de jonction en fonction du flux du champ magnétique. Ce déphasage est réparti sur les deux jonctions

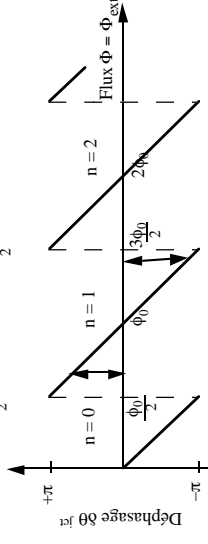


Figure 18-c

Evolution du déphasage de chacune des jonctions en fonction du flux du champ magnétique extérieur

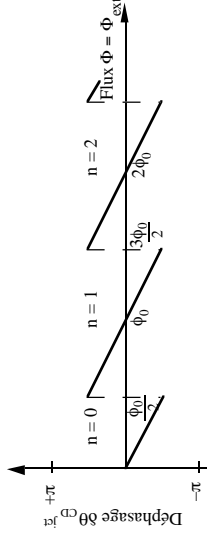
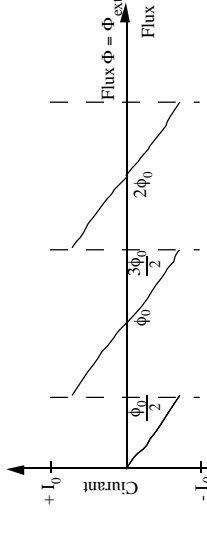


Figure 18-d

Courant circulant dans le circuit en fonction du flux du champ magnétique extérieur



IX-6 SQUID à 2 jonctions intégré dans un circuit.

Un SQUID à 2 jonctions est représenté à la figure 19:

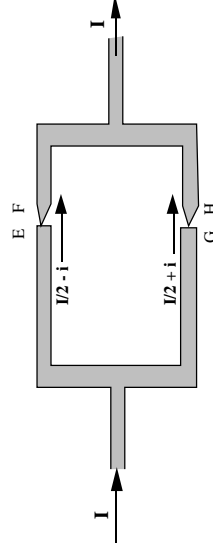


Figure 19

SQUID à 2 jonctions i, intégré dans un circuit

Un courant I arrive de la gauche dans le circuit et se divise en deux parties. Un courant $\frac{I}{2} - i$ passe par la branche supérieure. Un courant $\frac{I}{2} + i$ passe par la branche inférieure. Le courant I quitte le circuit vers la droite.

Après un tour de circuit, on doit avoir comme précédemment:

$$(\theta_F - \theta_E) + (\theta_E - \theta_G) + (\theta_G - \theta_H) + (\theta_H - \theta_F) = 2n\pi$$

$(\theta_E - \theta_G) + (\theta_H - \theta_F)$ est la somme des déphasages sur les chemins. Si comme précédemment I est suffisamment petit:

$$(\theta_E - \theta_G) + (\theta_H - \theta_F) = \delta\theta^{mag} = \frac{q}{\hbar} \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 2\pi \frac{\phi}{\phi_0}$$

soit:

$$\frac{I}{2} - i = i_0 \sin \left[\pi \left(n - \frac{\phi}{\phi_0} \right) - \delta\theta \right] \quad \text{et} \quad \frac{I}{2} + i = i_0 \sin \left[\pi \left(n - \frac{\phi}{\phi_0} \right) + \delta\theta \right]$$

$$I = i_0 \left\{ \sin \left[\pi \left(n - \frac{\phi}{\phi_0} \right) + \delta\theta \right] - \sin \left[\pi \left(n - \frac{\phi}{\phi_0} \right) - \delta\theta \right] \right\}$$

$$I = 2 i_0 \sin \delta\theta \cos \left[\pi \left(n - \frac{\phi}{\phi_0} \right) \right]$$

La mesure consiste à déterminer à tout moment le courant *maximum* I qui, le flux traversant le circuit peut circuler de gauche à droite. $\sin \delta\theta$ prend la valeur maximale possible et

$$I_{max} = 2 i_0 \cos \left[\pi \left(n - \frac{\phi}{\phi_0} \right) \right]$$

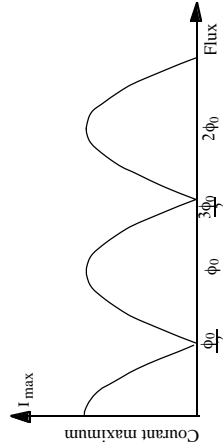


Figure 19
Intensité maximale traversant un SQUID à deux jonctions en fonction du flux à travers l'anneau

En suivant le courant I_{max} il est possible de déterminer une fraction de fluxon environ (1/1000).

IX-7 SQUID bistable [TIL-p.271]

Dans les cas précédents, par exemple au paragraphe IX-4, nous avons admis que le flux traversant l'anneau était exactement le flux $\phi = \phi^{ext}$ du champ extérieur et que le courant i était là pour assurer le déphasage.

En fait, même si il est faible, le courant i crée son propre champ à travers le circuit et donc son propre flux, dont la valeur par définition vaut $L i$.

Le flux à travers le circuit devient :

$$\phi = \phi^{ext} + L i$$

Et on a maintenant:

$$i = I_0 \sin \delta\theta^{tot} \quad \text{avec} \quad \delta\theta^{tot} = 2n\pi - 2\pi \frac{\phi}{\phi_0} = 2\pi \left(n - \frac{\phi^{ext} + L i}{\phi_0} \right)$$

$$\phi - \phi^{ext} = L I_0 \sin 2\pi \left(n - \frac{\phi}{\phi_0} \right)$$

On peut alors:

i) tracer pour différentes valeurs de ϕ

$$\phi^{ext} = \phi - L I_0 \sin 2\pi \left(n - \frac{\phi}{\phi_0} \right)$$

ii) prendre son symétrique par rapport à la première bissectrice qui donne ϕ en fonction de ϕ^{ext} .

iii) tracer $L i = L I_0 \sin 2\pi \left(n - \frac{\phi}{\phi_0} \right)$.

On obtient les courbes telles que celles des figures 21 et 22 [TIL-p.271]

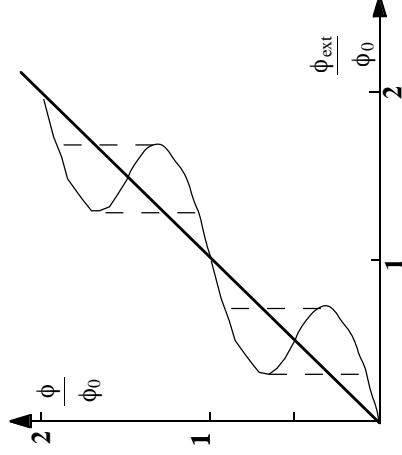


Figure 21

Flux total à travers un circuit réel: somme du flux du champ magnétique extérieur et du flux d'auto-induction.

Ce flux est représenté en fonction du flux du champ magnétique extérieur.

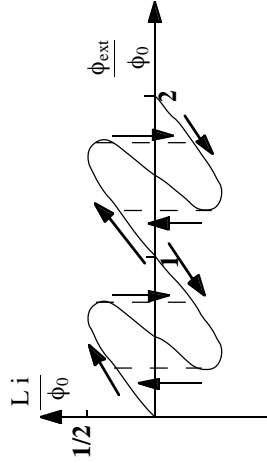


Figure 22

Intensité parcourant un anneau SQUID à une jonction de coefficient d'auto-induction, en fonction du flux du champ magnétique extérieur

X Effet du champ magnétique sur une jonction

X-1 Géométrie

Nous avons précédemment appliqué un champ magnétique à travers une boucle supraconductrice contenant une jonction.

Nous effectuons ici une opération différente, en appliquant un champ magnétique sur la jonction elle-même. Considérons pour cela la jonction située entre les blocs supraconducteurs (1) et (2) de la figure 23.

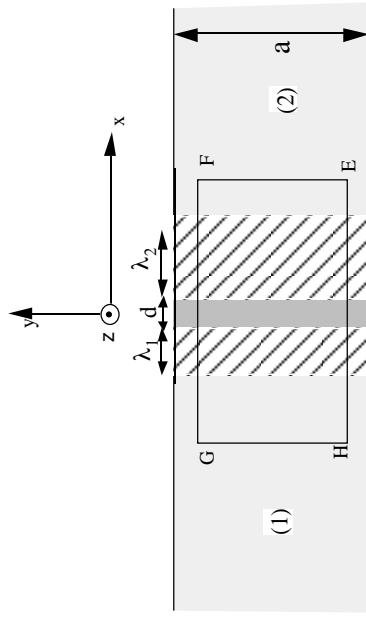


Figure 23 :

Jonction étroite soumise à un champ magnétique

La zone en gris foncé représente la jonction géométriquement bien définie. Le champ magnétique est uniforme; cette zone se comporte comme un métal normal.

La partie grisée claire représente le supraconducteur dans lequel **B** est nul.

La partie hachurée représente l'extension de la zone de London dans laquelle le champ magnétique s'amortit: λ_1 dans (1) et λ_2 dans (2). Dans cette zone, les courants supraconducteurs écartent le champ magnétique.

d est l'épaisseur de la jonction, a est sa largeur, et e est son épaisseur.

Le courant électrique circule dans la direction Ox

Le champ magnétique est appliqué selon Oz sur l'ensemble de la jonction.

X-2 Répartition de la densité de courant dans une jonction

Dans une jonction (du moins si sa largeur a n'est pas supérieure à une longueur caractéristique $\lambda_J \approx \text{Im}\eta$: jonction étroite), en l'absence de champ magnétique, la densité de courant se répartit uniformément.

Puisque le courant satisfait à:

$$I = I_0 \sin (\theta_2 - \theta_1)$$

la densité de courant satisfait à:

$$j = j_0 \sin (\theta_2 - \theta_1)$$

avec:

$$I_0 = j_0 a e$$

où a e est la section de la jonction.

En fait nous devrions appréhender les choses en sens inverse:

- i) en considérant tout d'abord la densité de courant j par unité de section de jonction,
- ii) en intégrant la densité de courant sur la section.

Cette procédure s'avère nécessaire lorsque la densité de courant n'est pas uniforme sur toute la section de la jonction, chose qui se produit lorsqu'un champ magnétique est appliqué sur la jonction.

Comme nous allons le montrer, la différence de phase $\delta\theta^{ict}(y) = \theta_2 - \theta_1$ dépend de la variable y et la densité de courant devient:

$$j (y) = j_0 \sin [\delta\theta^{ict} (y)]$$

Et il s'ensuit:

$$I = e \int_{y = -b/2}^{y = +b/2} j (y) dy = I = e j_0 \int_{y = -b/2}^{y = +b/2} \sin [\delta\theta^{ict} (y)] dy$$

X-3 Jonction étroite

Dans une jonction étroite, le champ magnétique **B** est uniforme sur la partie normale d'épaisseur d (Figure 24). De part et d'autre de la partie normale, le champ magnétique décroît exponentiellement sur les distances λ_1 et λ_2 qui représentent les

longueurs de London dans les blocs (1) et (2) qui peuvent être à priori de nature différente.

Figure 24

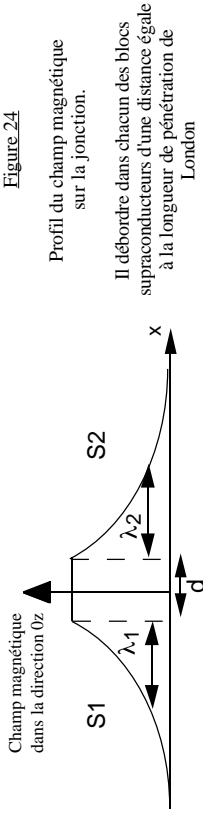
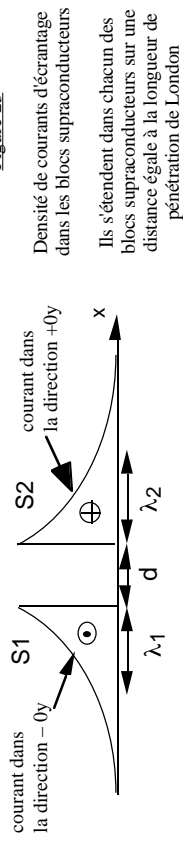


Figure 25



Les courants d'écrantage sont corrélativement situés dans les épaisseurs de London. Ils circulent suivant +0y dans le bloc (2) et -0y dans le bloc (1). (Figure 25)

Venons en au profil du potentiel vecteur **A** (figure 26).

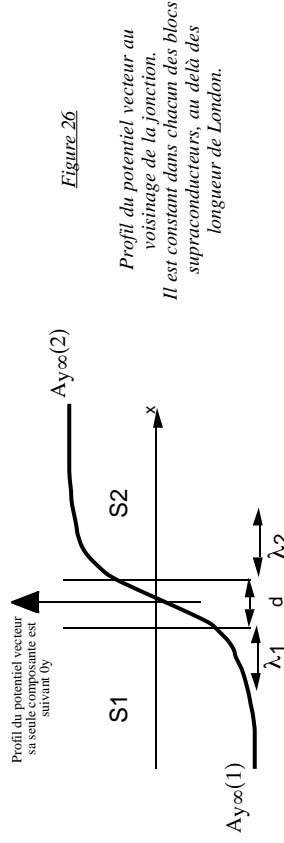
Puisque **B** présente seulement une composante suivant z, qui ne dépend que de x, on peut trouver un potentiel vecteur de seule composante $A_y(x)$ tel que $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, avec précisément:

$$B_z(x) = \frac{\partial A_y(x)}{\partial x}$$

Soit aussi, en prenant comme référence le centre de la jonction de coordonnée (0,0,0):

$$A_y(x) = \int_0^x B_z(\xi) d\xi$$

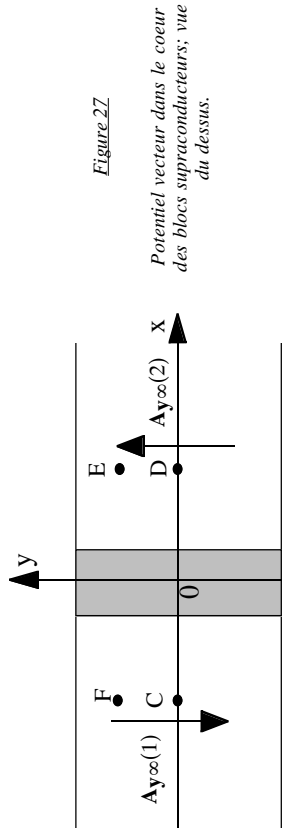
Figure 26



Le potentiel vecteur est constant au coeur de chacun des blocs avec des valeurs notées $A_{y\infty}(1)$ et $A_{y\infty}(2)$ et varie de l'une à l'autre de ces grandeurs dans la zone qui comprend la jonction elle-même et les épaisseurs de London situées de part et d'autre dans chacun des blocs.

$$A_{y\infty}(2) = B \left(\frac{d}{2} + \lambda_2 \right) \quad A_{y\infty}(1) = -B \left(\frac{d}{2} + \lambda_1 \right)$$

Considérons (figure 27) C et D deux points de l'axe Ox, situés assez loin dans les blocs (1) et (2) de telle sorte qu'en ces points, les potentiels vecteurs soient respectivement $A_{y\infty}(1)$ et $A_{y\infty}(2)$. La différence de phase entre ces points $\theta_D - \theta_C = \delta\theta^{\text{ct}}(0)$ sert de référence. Cette différence de phase est associée à la densité de courant $j(0) = j_0 \sin [\delta\theta^{\text{ct}}(0)]$.



Déterminons la différence de phase entre les points E et F situés dans les blocs (2) et (1) à la cote y.

$$\theta_E - \theta_F = (\theta_E - \theta_D) + (\theta_D - \theta_C) + (\theta_C - \theta_F)$$

$$(\theta_E - \theta_D) = \mathbf{DE} \cdot \frac{q}{\hbar} \mathbf{A}_{\infty}(2) = y \frac{q}{\hbar} A_{y\infty}(2)$$

$$(\theta_D - \theta_C) = \delta\theta^{\text{ct}}(0)$$

$$(\theta_C - \theta_F) = \mathbf{CF} \cdot \frac{q}{\hbar} \mathbf{A}_{\infty}(1) = -y \frac{q}{\hbar} A_{y\infty}(1)$$

$$\delta\theta^{\text{ct}}(y) = \theta_E - \theta_F = \delta\theta^{\text{ct}}(0) - y \frac{q}{\hbar} [A_{y\infty}(1) - A_{y\infty}(2)]$$

$$\delta\theta^{\text{ct}}(y) = \delta\theta^{\text{ct}}(0) + \frac{q}{\hbar} B y (d + \lambda_1 + \lambda_2)$$

en appelant ϕ , le flux de **B** à travers la jonction (épaisseurs de London comprises):

$$\phi = B y (d + \lambda_1 + \lambda_2)$$

et compte tenu de l'expression du quantum de flux:

$$\phi_0 = \frac{h}{2q}$$

$$\delta\theta|_{ct}(y) = \delta\theta|_{ct}(0) + 2\pi \frac{\phi}{\phi_0} \frac{y}{a}$$

$$j(y) = j_0 \sin \left[\theta_0 + 2\pi \frac{\phi}{\phi_0} \frac{y}{a} \right]$$

la densité de courant à la cote y est:

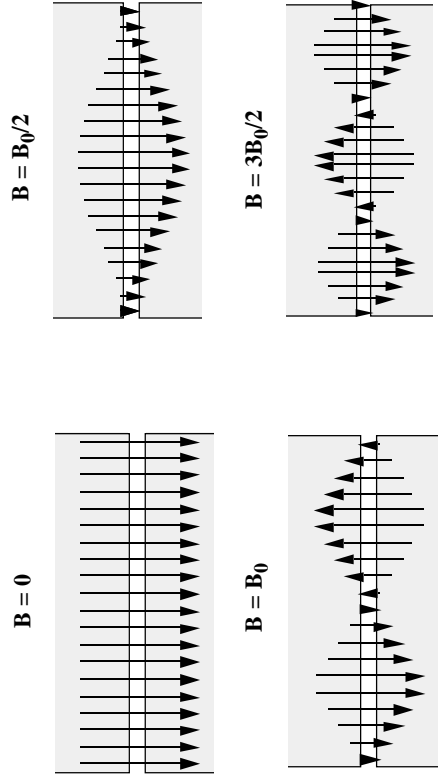


Figure 28: Profil de densité de courant traversant la jonction en fonction du flux total (zones de London comprises) à travers la jonction

L'intensité totale s'écrit:

$$I = j_0 \int_{-a/2}^{+a/2} \sin \left[\theta_0 + 2\pi \frac{\phi}{\phi_0} \frac{y}{a} \right] dy$$

qui conduit à:

$$I = I_0 \sin \theta_0 \frac{\sin \left(\pi \frac{\phi}{\phi_0} \right)}{\pi \frac{\phi}{\phi_0}}$$

ou encore en écrivant:

$$I = I_{\max} \sin \theta_0$$

avec:

$$I_{\max} = I_0 \frac{\sin \left(\pi \frac{\phi}{\phi_0} \right)}{\pi \frac{\phi}{\phi_0}}$$

I_{\max} vient se substituer à I_0 de la relation habituelle des jonctions. L'intensité maximale que peut supporter la jonction varie comme indiqué à la figure 29

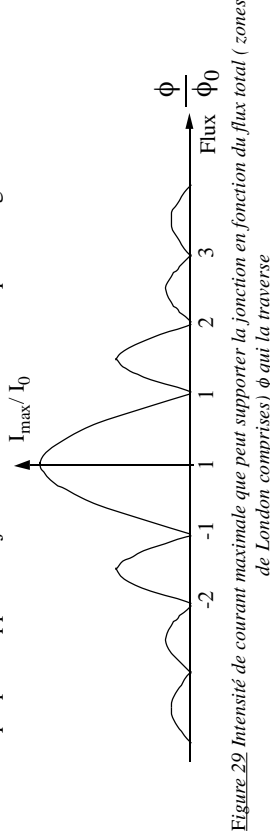


Figure 29 Intensité de courant maximale que peut supporter la jonction en fonction du flux total (zones de London comprises) ϕ qui la traverse

Et finalement que font les courants qui traversent en sens contraire? Ils forment des vortex correspondant à, vous l'auriez deviné, 1 fluxon (figure 30).

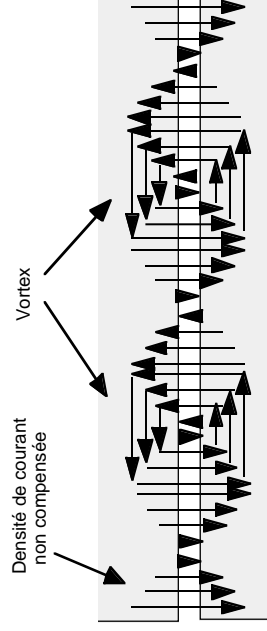


Figure 30 Fluxons s'installant dans une jonction Josephson soumise à un champ magnétique.