

CHAPITRE VII

Théorie de Ginzburg-Landau

I- Introduction

Jusqu'à présent, nous avons abordé les différentes propriétés des supraconducteurs comme si elles étaient indépendantes. Nous avons vu successivement:

- Leur comportement électrodynamique, avec en particulier les équations de London et leurs conséquences ($\mathbf{B}=0$ au coeur de l'échantillon, longueur de London)
- Leur comportement thermodynamique qui permet une première approche des transitions de phase.
- La classification des supraconducteurs qui s'établit à partir des résultats électrodynamiques et thermodynamiques (dépression d'enthalpie libre de surface provoquée par l'écrantage de London) et conduit à l'hypothèse de la longueur de cohérence ξ qui introduit une contribution positive à l'énergie de surface.
- Les effets de cohérence avec les effets Josephson et les applications de type SQUID.

Pour chaque nouveau problème, nous avons introduit de nouvelles hypothèses avec de nouvelles équations qui permettraient de rendre compte des nouveaux phénomènes.

Il nous manque de toute évidence une théorie microscopique élaborée à partir d'un minimum d'hypothèse dont toutes les équations que nous avons rencontrées ne seraient que les conséquences. C'est la théorie BCS. Elle est loin d'être simple et ne peut être abordée dans son intégralité dans le cadre de ce cours.

A défaut de ce modèle microscopique unique, on dispose d'une théorie phénoménologique qui rend compte de l'ensemble des phénomènes physiques que l'on a rencontrés et que l'on vient d'énumérer. Cette théorie est celle de Ginzburg-Landau.

Il s'agit bien d'une théorie phénoménologique:

- Elle est fondée sur l'intuition, avec ses propres lois et règles.
- Elle n'a pas de justification microscopique a priori (BCS est venu la justifier a posteriori)
- Elle rend compte des phénomènes expérimentaux et c'est cela sa justification.

Cette théorie n'est pas très simple. Le caractère intuitif des équations de départ est relativement déconcertant. Les équations sont non linéaires et leur traitement requiert des hypothèses qu'il faut sans cesse justifier. Elle est présentée avec différentes variantes dans la littérature, ce qui rend parfois difficile une première approche de ce modèle.

Mais cette théorie s'avère être très riche et très puissante, aussi bien dans l'étude de la transition de phase normal-supraconducteur que pour les effets électrodynamique, thermodynamique et quantique de la phase supraconductrice.

Cette théorie est en fait une application à la supraconductivité de la théorie de Landau des transitions de phase que nous commençons par rappeler.

II transition de phase: modèle de Landau

II-1 Paramètre d'ordre

Lors d'une transition de phase du deuxième ordre à une température critique T_c , un système passe d'un état désordonné à haute température à un état ordonné à basse température et il est le siège d'une brisure de symétrie.

Dans le modèle de Landau, le système est caractérisé quantitativement par un paramètre d'ordre η :

- nul en phase désordonnée (haute température).
- différent de 0 en phase ordonnée (basse température).

A la transition, le paramètre d'ordre croît continûment depuis 0, sans manifester de discontinuité.

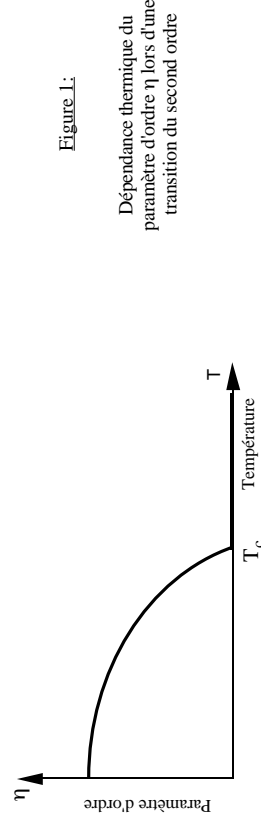


Figure 1:

II-2 Quelques exemples

Système ferromagnétique

L'aimantation spontanée est le paramètre d'ordre. Elle est nulle au-dessus de la température de Curie et croît à partir de T_c

Système antiferromagnétique

Le paramètre d'ordre est l'aimantation spontanée de chacun des sous réseaux.

Ordre-désordre dans les alliages

Considérons un alliage AB équiatomique cristallisant dans le système cubique centré (c'est par exemple le cas du laiton CuZn). Appelons α les sites des sommets des cubes et β les sites des centres des cubes.

Dans l'état désordonné, les atomes A et B se répartissent aléatoirement sur les sites α et β . c_A^α la concentration d'atomes A sur les sites α est égale à $1/2$. De même, c_A^β la concentration d'atomes A sur les sites β , est aussi égale à $1/2$.

Pour un système totalement ordonné, tous les atomes de type A sont sur les sites α et tous les atomes de type B sont sur les sites β . $c_A^\alpha = 1$, $c_A^\beta = 0$.

Dans l'état (partiellement) ordonné, la concentration d'atomes de type A sur les sites α est supérieure à $1/2$, et en conséquence la concentration de ces atomes sur les sites β est inférieure à $1/2$. On peut alors introduire le paramètre η tel que:

$$c_A^\alpha(T) = \frac{1 + \eta(T)}{2} \quad c_A^\beta(T) = \frac{1 - \eta(T)}{2}$$

$\eta(T)$ porte ici bien son nom puisqu'il quantifie le degré d'ordre chimique du matériau. η est nul au-dessous de la température d'ordre et croît progressivement lorsque la température décroît en dessous de T_c .

Si nous avons donné ces exemples, c'est pour montrer que la description en paramètre d'ordre s'adresse à des systèmes physiques très divers.

Il faut bien noter que dans tous le domaine de températures, aussi bien en dessous de T_c qu'au-dessus de T_c , la phase est homogène. Ce type de transition n'est en rien comparable à la transition solide-liquide qui fait coexister des "morceaux" macroscopiques de solide et de liquide et que l'on qualifie de transition du premier ordre.

Lors d'une transition du second ordre, il n'y a pas de séparation de phase même si il peut y avoir de larges fluctuations spatiales et temporelles du paramètre d'ordre, en particulier au voisinage de la température d'ordre T_c .

II-3 Développement de l'énergie libre

Le modèle de Landau, indépendamment du système particulier qu'il traite, est fondé sur l'hypothèse d'un développement de l'énergie libre du système en puissances successives paires du paramètre d'ordre:

$$f(\eta) = f_0 + \alpha \eta^2 + \frac{1}{2} \beta \eta^4$$

où les coefficients tels que $\alpha(T)$ et $\beta(T)$ sont des fonctions continues et dérivables de la température autour de la température d'ordre.

Dans ce modèle, le paramètre d'ordre effectivement réalisé à une température T est celui qui à cette température minimise l'énergie libre.

La forme analytique de $\alpha(T)$ la plus simple conduisant à un paramètre d'ordre nul au-dessus de T_c et non nul en dessous de cette température est de la forme:

$$\alpha = a(T - T_c)$$

Le paramètre $\beta(T)$ doit être positif, faute de quoi, $f(\eta)$ deviendrait $-\infty$ pour η grand

II-4 Transition de phase

A titre d'illustration, représentons l'évolution du profil d'énergie libre f défini au paragraphe précédent en fonction de η , en choisissant $\beta=2$ et $a=1$, pour différentes valeurs de α au dessus de T_c (0.1), à T_c (0), en dessous de T_c (-0.025, -0.050, -0.075)



L'état d'équilibre (η_{eq} , f_{eq}) correspond au minimum de l'énergie libre.

Pour $T > T_c$, l'énergie libre présente un minimum unique à $\eta = 0$ pour lequel $f_{eq} = 0$.

Pour $T < T_c$, l'énergie libre présente deux minima pour des valeurs de $\eta \neq 0$

Lorsque T décroît en dessous de T_c , la valeur d'équilibre η_{eq} glisse progressivement à partir de 0 et évolue comme on le voit sur la figure 1, alors que f_{eq} décroît progressivement, ce qui traduit l'abaissement d'énergie libre auquel conduit la phase ordonnée.

Analytiquement, η_{eq} et f_{eq} se déduisent de la minimisation de:

$$f(\eta) = f_0 + \alpha \eta^2 + \frac{1}{2} \beta \eta^4$$

Pour $T > T_c$ $\alpha > 0$ et la seule solution possible est $\eta_{eq} = 0$

Pour $T < T_c$ $\alpha < 0$ il y a 2 solutions possibles:

- une solution instable $\eta_{eq} = 0$

- une solution stable $\eta_{eq} = \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}} = \sqrt{\frac{-a(T-T_c)}{\beta}}$

L'énergie libre correspondant à la solution stable f_{eq} est telle que:

$$f_{eq} - f_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha^2}{\beta} \right)$$

III Modèle de Ginzburg-Landau

III-1 Description du modèle

Dans le développement ci-dessus, le paramètre d'ordre est supposé spatialement uniforme. Cette hypothèse s'est révélée être une grosse lacune pour un modèle voulant décrire un système au voisinage du point critique essentiellement, car autour de ce point le système présente de larges fluctuations.

Il a fallu modifier le modèle:

i) en affectant à chaque région de l'espace sa propre valeur de paramètre d'ordre $\eta(\mathbf{r})$.

ii) en ajoutant une contribution à l'énergie libre due à la variation spatiale de η . Qui dit variation spatiale dit gradient et gradient d'autant plus grand que la non-uniformité est élevée. La forme la plus simple d'énergie de "non-uniformité" est donc un gradient, que l'on élève au carré car on ne voit pas pourquoi un gradient de droite à gauche serait porteur de plus d'énergie qu'un gradient de gauche à droite.

Cette extension a conduit au modèle de Ginzburg-Landau plus apte à décrire les fluctuations du système dans lequel l'énergie libre se développe suivant:

$$f(\eta(\mathbf{r})) = f_0(\eta(\mathbf{r})) + \alpha(T) (\eta(\mathbf{r}))^2 + \frac{1}{2} \beta(T) (\eta(\mathbf{r}))^4 + \gamma (\nabla \eta(\mathbf{r}))^2$$

III- 2 Paramètre d'ordre d'équilibre

La recherche de la situation d'équilibre à une température donnée ne peut plus passer par une simple dérivation de l'énergie libre puisque f est une fonction qui dépend

elle-même de la fonction $\eta(\mathbf{r})$. Ce qui doit être minimisé, c'est l'énergie libre totale F du système, soit la quantité:

$$F[\eta(\mathbf{r})] = \int_{\text{volume}} f(\eta(\mathbf{r})) \, d\mathbf{r}$$

Le profil de $\eta(\mathbf{r})$ effectivement réalisé est celui qui minimise F , ou plus généralement le profil qui rend F stationnaire.

$F[\eta(\mathbf{r})]$ est l'énergie libre totale du système lorsque son profil est $\eta(\mathbf{r})$.

III-3 Stationnarité d'une forme intégrale.

C'est un problème que nous avons rencontré au § VIII-3 du chapitre II où il s'agissait de minimiser par rapport à \mathbf{B} la quantité:

$$E = \frac{1}{2} \mu_0 \int_{\text{échant}} \mathbf{B}(\mathbf{r})^2 + \lambda_L^2 (\text{rot } \mathbf{B}(\mathbf{r}))^2 \, d\mathbf{r}$$

C'est le problème qui se pose lorsque l'on cherche en mécanique analytique à obtenir les équations de Lagrange en minimisant l'action S qui s'écrit:

$$S = \int L(q(\dot{t}), q(\dot{t}), t) \, dt$$

Et c'est un problème que on rencontre très souvent en physique et on pourrait encore citer la recherche du chemin suivi par un rayon lumineux qui "minimise" (ou plutôt rend stationnaire) le chemin optique.

III-4 Retour sur la recherche d'un état d'équilibre par minimisation d'une fonction

Lorsque connaissant une fonction potentielle $f(x)$, on interroge sur la valeur de x pour laquelle l'équilibre est atteint, la réponse est spontanément: la valeur x_0 pour laquelle la dérivée $f'(x_0)$ est nulle. Cela conduit effectivement aux équilibres stables et instables.

Il n'est pas inutile de revenir sur ce que signifie une dérivée nulle en reprenant le développement d'une fonction potentielle $f(x)$ autour de ce x_0 d'équilibre.

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0) \left[\frac{df}{dx}(x_0) \right] + \frac{1}{2} (x-x_0)^2 \left[\frac{d^2f}{dx^2}(x_0) \right] + \dots$$

Ecrire que $\frac{df}{dx}(x_0) = 0$, c'est dire que, si on s'écarte de x_0 , d'une valeur $(x-x_0)$, alors au premier ordre, f ne voit pas sa valeur modifiée.

On passe donc d'une notion de dérivée nulle à une notion de stationnarité: au premier ordre f ne change pas de valeur si on s'écarte de x_0 .

III-5 Recherche d'état d'équilibre

C'est cette notion de stationnarité qui se généralise à la recherche d'un état d'équilibre dicté par la minimisation d'une intégrale. On parle aussi de dérivée fonctionnelle.

Le profil $\eta_{eq}(\mathbf{r})$ effectivement réalisé est celui tel que, au premier ordre:

$$\delta \int_{\text{volume}} \left[\eta_{eq}(\mathbf{r}) \right] d\mathbf{r} = \int_{\text{volume}} \left(f(\eta_{eq}(\mathbf{r})) + \delta \eta(\mathbf{r}) \right) d\mathbf{r}$$

pour tout écart $\delta \eta(\mathbf{r})$ du profil d'équilibre $\eta_{eq}(\mathbf{r})$

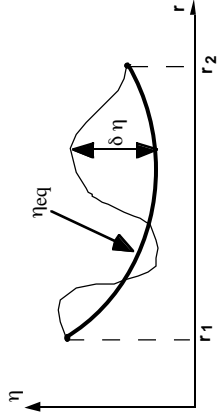


Figure 2: Profils de η

En trait gras profil d'équilibre η_{eq}

En trait maigre: profil écarté de $\delta \eta(\mathbf{r})$ du profil d'équilibre

En général, le problème est soumis à des conditions aux limites sur des points tels que r_1 ou r_2 qui forment des surfaces fermées ou sont renvoyés à l'infini.

IV. Modèle de Ginzburg-Landau: Application à la supraconductivité

IV-1 Paramètre d'ordre

Si le développement de l'énergie libre présente un caractère général, il faut dans chacun des cas identifier le paramètre d'ordre η et quantifier les paramètres α et β .

La supraconductivité étant caractérisée par l'absence de paires de Cooper au-dessus de T_c et leur présence grandissante en dessous de T_c , il semble naturel (historiquement a posteriori) de lier le paramètre d'ordre local $\eta(\mathbf{r})$ à leur densité $n(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}) \psi^*(\mathbf{r})$.

En fait, il s'avère préférable d'identifier le paramètre d'ordre $\eta(\mathbf{r})$ à la fonction d'onde de paire $\psi(\mathbf{r})$ elle-même qui, outre la densité de paires, contient la phase $\theta(\mathbf{r})$ et que on peut écrire:

$$\eta(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})| e^{i\theta(\mathbf{r})} = \sqrt{n(\mathbf{r})} e^{i\theta(\mathbf{r})}$$

Le paramètre d'ordre est complexe avec un argument $(n(\mathbf{r}))^{1/2}$ et une phase $\theta(\mathbf{r})$.

Nous verrons que le choix de l'identification de $\eta(\mathbf{r})$ à la fonction d'onde $\psi(\mathbf{r})$ est particulièrement riche puisqu'il permet de rendre compte à la fois de la transition de phase,

de l'effet Meissner, des équations de London, de la classification entre supraconducteurs de type I et II, mais aussi des effets de cohérence développés précédemment de façon indépendante.

IV-2 Modèle de Ginzburg-Landau en l'absence de champ magnétique

Le choix du paramètre d'ordre conduit directement à l'expression de l'énergie libre:

$$f_s = f_n + \alpha |\psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi|^4 + \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi|^2$$

où f_s est la densité d'énergie libre dans l'état supraconducteur et f_n la densité d'énergie libre dans l'état normal.

Le terme $\gamma |\nabla \psi|^2$ peut être vu sous un éclairage particulier lorsque l'on se souvient que, en mécanique quantique, l'opérateur associé à l'impulsion \mathbf{p} est :

$$\hat{\mathbf{p}} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla$$

Soit:

$$\nabla \psi = \frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \psi$$

et

$$|\nabla \psi|^2 = \frac{1}{\hbar^2} \mathbf{p}^2 |\psi|^2$$

où:

$|\psi|^2$ est la densité de paires supraconductrices
 \mathbf{p}^2 leur impulsion

Cela fait de ce terme une contribution $\frac{\mathbf{p}^2}{2m}$ de type énergie cinétique. Si on admet

que c'est effectivement l'énergie cinétique des paires supraconductrices, il suffit d'identifier γ à $\frac{\hbar^2}{2m}$, et postuler que l'énergie libre se développe selon:

$$f_s = f_n + \alpha |\psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi|^4 + \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi|^2$$

IV-3 Modèle de Ginzburg-Landau en présence de champ magnétique

Il est tout d'abord tout à fait naturel d'ajouter une contribution d'énergie magnétique qui s'écrit classiquement:

$$\frac{\mathbf{B}^2}{2 \mu_0}$$

Mais nous devons aussi reconsidérer le terme d'énergie cinétique puisque, en présence d'un potentiel vecteur \mathbf{A} , la véritable impulsion \mathbf{p} est liée à la vitesse \mathbf{v} par la relation issue de la mécanique analytique:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} + q\mathbf{A}$$

ce qui transforme l'énergie cinétique en:

$$\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 = \frac{1}{2}m \left| \frac{\mathbf{p}}{m} - \frac{q\mathbf{A}}{m} \right|^2$$

et puisque c'est à ce \mathbf{p} que correspond en mécanique quantique l'opérateur $\frac{\hbar}{i}\nabla$, la densité d'énergie libre du matériau dans l'état supraconducteur sous champ f_{SH} se développe selon:

$$f_{SH} = f_{n0} + \alpha |\psi|^2 + \frac{1}{2}\beta |\psi|^4 + \frac{1}{2m} \left| \frac{\hbar}{i}\nabla\psi - q\mathbf{A}\psi \right|^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0}$$

Il faut bien garder à l'esprit que, hormis f_{n0} , la densité d'énergie libre de l'état normal en champ nul qui sert de valeur de référence, toutes les autres grandeurs physiques dépendent de la position \mathbf{r} : $\psi(\mathbf{r})$, $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, $f_{SH}(\mathbf{r})$.

$\alpha(T)$ et $\beta(T)$ sont des paramètres caractéristiques de l'échantillon qui ne dépendent que de la température.

IV-4 Invariance par changement de jauge

La substitution de $\left| \frac{\hbar}{i}\nabla\psi - q\mathbf{A}\psi \right|^2$ à $|\nabla\psi|^2$ a été en fait justifiée par Landau par la nécessité d'introduire pour énergie libre, qui est une quantité physique, une grandeur invariante par changement de jauge.

Or, nous avons vu qu'un changement de jauge modifie à la fois le potentiel scalaire $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ et la phase $\theta(\mathbf{r})$ de la particule chargée qui interagit avec le champ magnétique.

Il est tout à fait évident que lors d'un changement de jauge, $|q\mathbf{A}\psi|^2$ n'est pas conservé, pas plus que $\left| \frac{\hbar}{i}\nabla\psi \right|^2$ ne l'est lors d'un changement de phase de la fonction d'onde de la particule.

On montre en revanche qu'en raison de l'interdépendance de $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ et $\theta(\mathbf{r})$, la quantité $\left| \frac{\hbar}{i}\nabla\psi - q\mathbf{A}\psi \right|^2$ est invariante par changement de jauge. C'est tout à fait heureux puisque cette grandeur est proportionnelle au carré de la vitesse des particules qui est une grandeur mesurable et donc physique. (voir § 5-2 du chapitre II et § 4-2 du chapitre VI)

V Retour sur la thermodynamique du système

IV-1 Choses sûres du magnétisme (voir Landau Electrodynamique [LAN-p.170])

Travail total fourni par l'expérimentateur.

L'expression du travail fourni par un expérimentateur pour charger une bobine qui contient de la matière s'écrit, à partir du champ magnétique $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ et l'excitation magnétique $\mathbf{H}(\mathbf{r})$

$$\delta W_{\text{exp}} = \int_{\text{espace}} \mathbf{H} \delta \mathbf{B} \, d\tau$$

où \mathbf{H} est l'excitation magnétique totale $\mathbf{H} = \mathbf{H}^0 + \mathbf{H}^m$ et \mathbf{B} le champ magnétique total $\mathbf{B} = \mathbf{B}^0 + \mathbf{B}^a$.

\mathbf{H}^0 et $\mathbf{B}^0 = \mu_0 \mathbf{H}^0$ sont créés par le solénoïde extérieur. C'est le champ en l'absence de matière.

\mathbf{H}^m se calcule en utilisant les charges magnétiques.

\mathbf{B}^a est dû aux courants de réaction (courants ampériens ou courants supraconducteurs)

Travail d'aimantation de la matière

Le travail d'aimantation de la matière est égal au travail de charge du solénoïde avec matière diminué du travail de charge du solénoïde sans matière, soit:

$$\delta W = \int_{\text{espace}} (\mathbf{H} \delta \mathbf{B} - \mathbf{H}^0 \delta \mathbf{B}^0) \, d\tau$$

Comme montré dans plusieurs ouvrages (voir Landau électrodynamique LAN-p.170), ce travail est égal à:

$$\delta W = \int_{\text{matière}} \mu_0 \mathbf{H}^0 \delta \mathbf{I} \, d\tau$$

où \mathbf{I} est la densité d'aimantation par unité de volume et \mathbf{H}^0 l'excitation magnétique en l'absence de matière aimantée. L'intégration porte seulement sur l'échantillon aimanté.

Dans Landau, \mathbf{H}^0 est le "H gothique"

Thermodynamique du cylindre infini

Dans le cas général d'une forme quelconque d'échantillon, le traitement est complexe. Pour simplifier, nous travaillerons dans le cadre d'un échantillon infiniment long dans lequel il n'y a pas de champ démagnétisant et pour lequel l'excitation magnétique \mathbf{H} est égale à \mathbf{H}^0 .

Dans un tel échantillon, \mathbf{B} (différent de \mathbf{B}^0) et \mathbf{I} sont uniformes et:

$$\delta W = \mu_0 \mathbf{H} \delta \mathbf{I} \quad V = \mu_0 \mathbf{H} \, dM$$

V-2 Définition du système

Il y a 2 façons de voir les choses: ou bien le système est constitué de la "matière seule", ou bien il est constitué de l'ensemble "matière + solénoïde".

Cas où le système est constitué de la "matière seule":

La grandeur extensive est \mathbf{M}

$$\delta W = \mu_0 \mathbf{H} \delta \mathbf{I} \quad V = \mu_0 \mathbf{H} d\mathbf{M}$$

$$h = u - \mu_0 \mathbf{H} \cdot \mathbf{M} \quad g = f - \mu_0 \mathbf{H} \cdot \mathbf{M}$$

$$dg = -s dT - \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M}$$

Cas où le système est constitué de: "matière + solénoïde"

La grandeur extensive est \mathbf{B}

$$\delta W = \mu_0 \mathbf{H} d\mathbf{B}$$

$$h = u - \mu_0 \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \quad g = f - \mu_0 \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$$

$$dg = -s dT - \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}$$

Dans le chapitre III consacré à la thermodynamique, nous avons adopté comme système la matière seule. Il est bien évident qu'il est possible de traiter les effets physiques avec l'une ou l'autre des conventions, pourvu que les calculs soient effectués de façon cohérente.

V-3 Énergie interne

Il n'est pas inutile pour l'interprétation de la théorie de Landau de se reposer la question de l'énergie interne d'un système. Pour cela considérons un gaz. L'énergie interne U est la somme des énergies cinétiques des particules (on ne tient compte que de ce terme dans le gaz parfait) et de l'énergie d'interaction entre particules (gaz de Van der Waals par exemple). A ces contributions, il faut ajouter une énergie potentielle lorsque ce gaz est placé dans un champ, par exemple de gravitation.

L'énergie interne est le travail que doit fournir l'expérimentateur pour amener les particules dans leur état (avec leur vitesse et leur énergie potentielle) en les prenant au repos à l'infini, en les amenant une à une par exemple. C'est aussi l'énergie libre du système à 0K ($F = U - TS$)

V-4 Système en Ginzburg-Landau

Les différents ouvrages ne sont pas toujours concordants sur les fonctions thermodynamiques à considérer. Ceci est source de confusion qui vient s'ajouter à la nature complexe de la théorie. Nous récapitulons ici les différentes approches utilisées dans les livres:

Système "matière + solénoïde"

Ce que on trouve le plus souvent (Landau lui-même et à la suite un grand nombre d'auteurs [BUR-p.48]) est (ce qui est noté \mathbf{h} par ces auteurs est notre \mathbf{B}):

$$f_{sH} = f_{n0} + \alpha |\psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi|^4 + \frac{1}{2m} \left| \frac{\hbar}{i} \nabla \psi - q\mathbf{A} \psi \right|^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{2 \mu_0}$$

avec une densité d'enthalpie libre définie par:

$$g = f - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$$

ce qui conduit à:

$$g_{sH} = f_{n0} + \alpha |\psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi|^4 + \frac{1}{2m} \left| \frac{\hbar}{i} \nabla \psi - q\mathbf{A} \psi \right|^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{2 \mu_0} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$$

Ces auteurs se sont manifestement placés dans le cas où le système thermodynamique est constitué de la "matière + du solénoïde excitateur vide", l'expression du travail étant $\delta W = \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}$.

Dans l'état normal:

$$g_{nH} = f_{n0} + \frac{\mathbf{B}^2}{2 \mu_0} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$$

soit, avec $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$

$$g_{nH} = f_{n0} - \frac{\mathbf{B}^2}{2 \mu_0} = f_{n0} - \frac{\mu_0 \mathbf{H}^2}{2}$$

Système "matière seule"

Mais on trouve aussi parfois (D.R. Tilley et J. Tilley [TIL-p.299]) comme expression de la densité d'énergie libre :

$$f_{sH} = f_{n0} + \alpha |\psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi|^4 + \frac{1}{2m} \left| \frac{\hbar}{i} \nabla \psi - q\mathbf{A} \psi \right|^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{2 \mu_0} - \mu_0 \frac{\mathbf{H}^2}{2}$$

où la densité d'enthalpie libre est définie par:

$$g = f - \mu_0 \mathbf{H} \cdot \mathbf{I}$$

ce qui conduit à:

$$g_{sH} = f_{n0} + \alpha |\psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi|^4 + \frac{1}{2m} \left| \frac{\hbar}{i} \nabla \psi - q\mathbf{A} \psi \right|^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{2 \mu_0} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + \mu_0 \frac{\mathbf{H}^2}{2}$$

où, par définition de $\mathbf{H} : \mathbf{I} = \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{H}$

De la première densité d'énergie libre, on a retranché le terme $\frac{\mathbf{H}^2}{2}$ qui est l'intégration de $\mathbf{H}^0 \delta \mathbf{B}^0$, la contribution des bobines à l'énergie libre. Le système thermodynamique est la matière seule et l'expression du travail $\delta W = \mathbf{H} d\mathbf{l}$

Dans l'état normal et en tenant compte de $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$

$$g_{\text{NH}} = f_{\text{N0}} + 0$$

Systèmes mixtes

D'autres auteurs enfin utilisent les 2 systèmes thermodynamiques en notant différemment leurs 2 énergies libres. Ainsi Antognazza, Decroux et Triscone (ANT-p.35) notent $f(\text{T}, \text{M})$ l'énergie libre du système composé de la seule matière et $f(\text{T}, \text{B})$ celle du système "matière + solénoïde". On trouve alors la relation:

$$f(\text{T}, \text{M}) = f(\text{T}, \text{B}) - \mu_0 \frac{\mathbf{H}^2}{2}$$

Le système "matière seule" est celui que nous avons utilisé jusqu'à maintenant et en particulier au chapitre V.

Dans ce chapitre, nous suivons Landau en adoptant le système "matière + bobines". Cela nous semble moins logique, mais ce sera plus simple pour le lecteur qui voudra approfondir le sujet car la plupart des ouvrages sont écrits avec cette convention. Cela n'a bien sur aucune incidence sur les résultats physiques de la supraconductivité.

Donc attention lors de la comparaison de résultats du chapitre V et du chapitre IX.

V-5 Equivalence des 2 systèmes

Ne serait-ce que pour se rassurer sur l'équivalence de ces deux définitions de système, nous allons calculer la différence d'enthalpie libre entre l'état normal et le coeur de l'état supraconducteur où $\mathbf{B}=0$ et où \mathbf{H} est différent de 0.

Système "matière + solénoïde":

$$g_{\text{SH}} = f_{\text{N0}} + \alpha |\psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi|^4 + \frac{1}{2m} \left| \frac{\hbar}{i} \nabla \psi - q\mathbf{A} \psi \right|^2 \quad \text{et} \quad g_{\text{NH}} = f_{\text{N0}} - \frac{\mu_0 \mathbf{H}^2}{2}$$

Système "matière seule":

$$g_{\text{SH}} = f_{\text{N0}} + \alpha |\psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi|^4 + \frac{1}{2m} \left| \frac{\hbar}{i} \nabla \psi - q\mathbf{A} \psi \right|^2 + \mu_0 \frac{\mathbf{H}^2}{2} \quad \text{et} \quad g_{\text{NH}} = f_{\text{N0}} + 0$$

La différence entre les enthalpies libres de l'état supraconducteur et les enthalpies libres de l'état normal sont égales et c'est bien rassurant.

VI Equations de Ginzburg-Landau

VI-1 Equations générales:

Conformément à la théorie de Ginzburg-Landau, nous devons écrire que l'énergie libre totale du système:

$$F_{\text{SH}}[\psi(\mathbf{r}), \mathbf{A}(\mathbf{r})] = \int_{\text{volume}} f_{\text{SH}}[\psi(\mathbf{r}), \mathbf{A}(\mathbf{r})] d\mathbf{r}$$

est stationnaire par rapport au paramètre d'ordre.

L'introduction du potentiel vecteur vient néanmoins rendre plus complexe la situation et Ginzburg et Landau postulent que la configuration que va adopter le système (profil de ψ et profil de \mathbf{A}) sera stationnaire par rapport à toute modification des profils de ces grandeurs.

Les profils de ψ et \mathbf{A} effectivement réalisés (notés passagèrement ψ_{eq} et \mathbf{A}_{eq}) sont tels que, pour toute petite variation $\delta\psi(\mathbf{r})$ et $\delta\mathbf{A}(\mathbf{r})$:

$$\begin{aligned} F_{\text{SH}}[\psi_{\text{eq}}(\mathbf{r}), \mathbf{A}_{\text{eq}}(\mathbf{r})] &= F_{\text{SH}}[\psi_{\text{eq}}(\mathbf{r}) + \delta\psi(\mathbf{r}), \mathbf{A}_{\text{eq}}(\mathbf{r})] \\ F_{\text{SH}}[\psi_{\text{eq}}(\mathbf{r}), \mathbf{A}_{\text{eq}}(\mathbf{r})] &= F_{\text{SH}}[\psi_{\text{eq}}(\mathbf{r}), \mathbf{A}_{\text{eq}}(\mathbf{r}) + \delta\mathbf{A}(\mathbf{r})] \end{aligned}$$

Comme montré en annexe, cela conduit à deux équations appelées équations de Ginzburg-Landau: (les ψ et \mathbf{A} de ces 2 équations sont les ψ_{eq} et \mathbf{A}_{eq})

La première équation s'écrit:

$$\alpha \psi + \beta \psi |\psi|^2 + \frac{1}{2m} \left[\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right]^2 \psi = 0 \quad (\text{GL1})$$

(remarque: cette relation apparaît dans la littérature sous diverses formes qui dépendent du positionnement du nombre imaginaire i et de \hbar dans l'équation)

et la seconde:

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) + \frac{i\hbar q}{2m} [\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi] + \frac{q^2 \mathbf{A}}{m} |\psi|^2 = 0$$

soit en tenant compte de $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ et de l'équation de Maxwell $\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$:

$$\mathbf{j} = \frac{i\hbar q}{2m} [\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi] - \frac{q^2 \mathbf{A}}{m} |\psi|^2 \quad (\text{GL2})$$

Chacune de ces équations fait apparaître à la fois la fonction d'onde $\psi(\mathbf{r})$ et la grandeur magnétique $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ qui s'avèrent donc ne plus être indépendantes.

Ces équations sont non linéaires et manifestement assez complexes. Les moyens de calculs numériques actuels doivent permettre de résoudre les cas les plus difficiles.

Des solutions analytiques sont possibles dans des cas particulièrement simples ou peuvent être menées à leur terme au prix d'approximations sévères. C'est ce que l'on rencontre dans les livres classiques et que nous reproduisons, en gardant toujours à l'esprit l'approximation ou le cas particulier que nous abordons.

Des conditions aux limites viennent enfin s'ajouter à ces équations, qui traduisent par exemple que les électrons supraconducteurs ne peuvent sortir spontanément de la matière isolée. L'équation de conditions aux limites d'un supraconducteur dans le vide ou entouré d'isolant s'écrit:

$$\left(\frac{\hbar}{i} \nabla \psi - q \mathbf{A} \psi \right) \cdot \mathbf{n} \Big|_{\text{surface}} = 0$$

Nous reviendrons sur cette condition au paragraphe XIII lorsque nous nous pencherons sur des phénomènes de surface.

VI-2 Equations de Ginzburg-Landau en jauge de London

Comme d'habitude en électrodynamique, le choix de jauge sera réalisé au cas par cas, en fonction du problème posé et de la géométrie du système. Il sera dicté par la facilité à trouver les solutions sachant que, in fine, les grandeurs physiques ne dépendent pas du choix de jauge.

Parmi l'infinité de choix de jauge possibles, la jauge de London jouera un rôle privilégié (mais pas unique) et nous consacrons ce paragraphe à l'écriture de la première équation de Ginzburg-Landau en jauge de London. C'est une première opportunité de manipuler cette équation qui, de façon générale, s'écrit:

$$\alpha \psi + \beta \psi |\psi|^2 + \frac{1}{2m} \left[\frac{\hbar}{i} \nabla - q \mathbf{A} \right]^2 \psi = 0$$

La première difficulté est la manipulation du terme au carré contenant le gradient ∇ et le potentiel vecteur \mathbf{A} et qui doit se comprendre comme:

$$\left[\frac{\hbar}{i} \nabla - q \mathbf{A} \right]^2 \psi = \left[\frac{\hbar}{i} \nabla - q \mathbf{A} \right] \left[\frac{\hbar}{i} \nabla - q \mathbf{A} \right] \psi$$

où il est impératif de respecter l'ordre des termes en raison des non commutations possibles des opérateurs.

Ainsi en développant l'expression ci-dessus:

$$\left[\frac{\hbar}{i} \nabla - q \mathbf{A} \right]^2 \psi = \frac{\hbar}{i} \nabla \left(\frac{\hbar}{i} \nabla \psi \right) - q \left(\mathbf{A} \frac{\hbar}{i} \nabla \psi \right) - \frac{\hbar}{i} \nabla \left(\mathbf{A} \psi \right) + q^2 \mathbf{A}^2 \psi$$

où ∇ se comportant comme une dérivée généralisée, on a:

$$\begin{aligned} \nabla (\mathbf{A} \psi) &= \mathbf{A} \nabla \psi + \psi \nabla \mathbf{A} \\ (\text{div} (\mathbf{A} \psi)) &= \mathbf{A} \cdot \text{grad} \psi + \psi \text{div} \mathbf{A} \end{aligned}$$

En se souvenant que $\nabla (\nabla \psi) = \nabla^2 \psi = \Delta \psi$ et en se plaçant en jauge de London où :

$$\nabla \mathbf{A} = \text{div} \mathbf{A} = 0,$$

la nouvelle forme de la première équation de Ginzburg-Landau:

$$\alpha \psi + \beta \psi |\psi|^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi - 2 \frac{\hbar}{i} \mathbf{q} \cdot \nabla \psi + \frac{q^2}{m} \mathbf{A}^2 \psi = 0 \quad (\text{GL'1})$$

VII- Equations de Ginzburg-Landau dans les situations simples.

VII-1 Transition de phase en champ nul et en milieu homogène

Considérons tout d'abord le cas d'un supraconducteur homogène de densité de paires uniforme $|\psi|^2 = n$, non soumis à un champ magnétique.

C'est la situation particulièrement simple décrite au paragraphe II de ce chapitre. Le développement de l'énergie libre se réduit à:

$$f_{s0} = f_{n0} + \alpha |\psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi|^4$$

La minimisation de la fonction f_{s0} conduit simplement à:

$$\alpha + \beta |\psi|^2 = 0$$

où on reconnaît la première équation de Ginzburg-Landau appliquée à ce cas particulier. La solution de cette équation est

$$|\psi_{\infty}(T)|^2 = - \frac{\alpha(T)}{\beta(T)}$$

où l'indice ∞ a été ajouté pour rappeler qu'il s'agit de la valeur de $|\psi|^2$ et donc de la densité de paires, dans un matériau homogène infini ou si l'échantillon est de taille finie, très loin des interfaces [TIN-p.116].

La valeur $f_{s0,\infty}$ que prend la densité d'énergie libre en tout point de l'espace lorsque $|\psi|^2$ est uniformément égal à $|\psi_{\infty}|^2$ est:

$$f_{s0,\infty}(T) = f_{n0} - \frac{\alpha^2(T)}{2\beta(T)}$$

où f_{n0} est la valeur de référence.

VII-2 Identification du champ critique H_c

Etant donné la relation générale entre l'énergie libre et l'enthalpie libre, valable aussi bien dans l'état normal:

$$g = f - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$$

Sous champ nul:

$$g_{n0} = f_{n0} \quad \text{et} \quad g_{s0} = f_{s0}$$

ce qui conduit à:

$$g_{s0} - g_{n0} = f_{s0} - f_{n0} = \alpha |\psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi|^4$$

avec en particulier:

$$f_{s0} - f_{n0} = g_{s0} - g_{n0} = \alpha |\psi_\infty|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi_\infty|^4$$

Or, nous avons, au chapitre IV identifié la différence d'enthalpie libre entre l'état supraconducteur et l'état normal dans le matériau massif à $g_{s0} - g_{n0} = \mu_0 \frac{H_c^2}{2}$. Il s'ensuit la relation entre α , β et H_c :

$$f_{s0} - f_{n0} = - \frac{\alpha^2(T)}{2\beta(T)} = - \mu_0 \frac{H_c^2(T)}{2}$$

Ces paramètres dépendent bien sûr de la température et nous disposons de courbes assez précises de $H_c(T)$.

VII-3 Situations où la densité de paire est uniforme $|\psi|$ constant.

Nous traiterons par la suite plusieurs cas où la densité de paire est homogène, ce qui signifie que $|\psi|$ ne dépend pas de la position [GEN-p.182]. Dans ce cas:

$$\psi(\mathbf{r}) = |\psi| e^{i\theta(\mathbf{r})} = \sqrt{n} e^{i\theta(\mathbf{r})}$$

ce qui conduit en tenant compte de $\nabla e^{i\theta(\mathbf{r})} = i \nabla\theta(\mathbf{r}) e^{i\theta(\mathbf{r})}$:

$$\alpha \psi(\mathbf{r}) + \beta \psi(\mathbf{r}) |\psi|^2 + \frac{1}{2m} \left[\hbar \nabla\theta(\mathbf{r}) - q\mathbf{A} \right]^2 \psi(\mathbf{r}) = 0$$

et

$$\mathbf{j} = \frac{q}{m} \left[\hbar \nabla\theta(\mathbf{r}) - q\mathbf{A} \right] |\psi|^2$$

VII-4 Equations de London

C'est en se plaçant dans ce cas que l'on retrouve l'équation de London avec laquelle nous avons travaillé au chapitre II puisque nous avons:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = n q \frac{\hbar}{m} \left(\nabla\theta(\mathbf{r},t) - \frac{q}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{r},t) \right)$$

et donc:

$$\text{rot } \mathbf{j}(\mathbf{r},t) = - \frac{n q^2}{m} \mathbf{B}$$

qui, en jauge de London, s'écrit:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = - \frac{n q^2}{m} \mathbf{A}(\mathbf{r},t)$$

On en connaît du chapitre II les conséquences de cette équation avec l'introduction de la longueur de London et l'interprétation de l'effet Meissner.

$$\lambda^2 = \frac{m}{\mu_0 q^2 n_s}$$

où:

$$m = \text{masse d'une paire de Cooper} = 2m_e.$$

$$q = \text{charge d'une paire de Cooper} = 2e$$

$$n_s = \text{densité de paires} = n/2$$

VII-5 Champ critique et longueur de London

Le développement de la densité d'énergie $f_{SH}(T)$ dépend des paramètres $\alpha(T)$ et $\beta(T)$ qui sont caractéristiques de chacun des matériaux et que nous devons relier aux grandeurs physiques expérimentales de ces matériaux, telles que le champ critique $H_c(T)$ ou la longueur de London $\lambda(T)$.

Nous disposons actuellement de 4 relations, issues de calculs ou de définitions:

$$n_s = |\psi|^2 \quad (\text{par définition})$$

$$|\psi|^2 = - \frac{\alpha}{\beta} \quad (\text{obtenue par minimisation de } f)$$

$$\mu_0 \frac{H_c^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha^2}{\beta} \right) \quad (\text{par définition de } H_c)$$

$$\lambda^2 = \frac{m}{\mu_0 q^2 n_s} \quad (\text{longueur de London})$$

Elles permettent d'exprimer les paramètres de l'équation de Ginzburg-Landau $\alpha(T)$ et $\beta(T)$ aux grandeurs expérimentales $\lambda(T)$ et $H_c(T)$ [TIN-p.109]

$$\alpha(T) = - \mu_0 \frac{q^2}{m_s} H_c^2(T) \lambda^2(T) \quad \beta(T) = \mu_0 \frac{q^4}{m_s^2} H_c^2(T) \lambda^4(T)$$

VII-6 Longueur de cohérence

Plaçons-nous maintenant en champ nul et regardons le comportement de $\psi(\mathbf{r})$ au voisinage d'une interface vide/supraconducteur.

Les équations de Ginzburg-Landau se réduisent à :

$$\alpha \psi + 2\beta\psi|\psi|^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi = 0$$

et

$$\frac{i\hbar q}{2m} [\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi] = 0$$

La seconde équation impose que la phase de ψ soit indépendante de la position (cela se vérifie en développant cette équation avec $\psi = A e^{i\theta(\mathbf{r})}$). Nous la choisissons nulle, ce qui conduit à ψ réel.

La résolution de la première équation devient très classique.

En posant:

$$f = \sqrt{\frac{\beta}{|\alpha|}} \psi$$

on obtient l'équation:

$$-\frac{\hbar^2}{2m|\alpha|} \frac{d^2 f}{dx^2} + f(1-f^2) = 0$$

qui, avec:

$$\eta = \frac{x}{\xi} \quad \text{et} \quad \xi^2 = \frac{\hbar^2}{2m|\alpha|}$$

se réduit à:

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + f(1-f^2) = 0$$

dont la solution, compte tenu de la condition aux limites $\psi = 0$ en $x=0$, est:

$$f = \text{th} \left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} \right)$$

soit en revenant à ψ :

$$\psi(x, T) = \psi_\infty(T) \text{th} \left(\frac{x}{\sqrt{2} \xi(T)} \right) \quad \text{avec} \quad \psi_\infty(T) = \sqrt{\frac{|\alpha(T)|}{\beta(T)}}$$

ψ_∞ est la valeur que prend ψ au coeur de l'échantillon loin de la surface. C'est la valeur de fonction d'onde que nous avons trouvée lorsque nous avons considéré un échantillon homogène sans effet de bord (paragraphe VI-1 de ce chapitre)

$\xi(T)$ est la longueur caractéristique nécessaire pour faire passer la fonction d'onde de 0 à sa valeur "massive" ψ_∞ .

la densité de paires supraconductrices $n(x) = |\psi(x)|^2$ évolue de façon assez similaire.

$\xi(T)$ est pratiquement la longueur de cohérence que nous avons introduite au chapitre V.

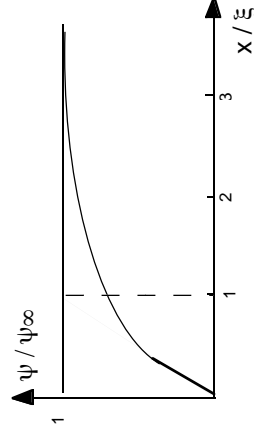


Figure 4.

Profil du paramètre d'ordre au voisinage d'une interface vide/supraconducteur

VII-7 Champ critique, longueur de London et longueur de cohérence

Ayant identifié la longueur de cohérence à:

$$\xi^2(T) = \frac{\hbar^2}{2m|\alpha(T)|}$$

H_c peut être exprimé à partir des 2 longueurs caractéristiques:

$$H_c(T) = \frac{\hbar}{\sqrt{2} \mu_0 q \xi(T) \lambda(T)} = \frac{\phi_0}{2\pi \sqrt{2} \mu_0 \xi(T) \lambda(T)}$$

VII-8 Retour sur la densité de paire de Cooper constante $|\psi| = \text{constante}$

Fort des expressions ci dessus, nous revenons sur le paragraphe VII-3 et le complétons. Nous avons déjà les 2 équations de Ginzburg-Landau sous la forme:

$$\alpha \psi(\mathbf{r}) + \beta\psi(\mathbf{r})|\psi|^2 + \frac{1}{2m} [\hbar \nabla \theta(\mathbf{r}) - q\mathbf{A}]^2 \psi(\mathbf{r}) = 0$$

et

$$\mathbf{j} = \frac{q}{m} [\hbar \nabla \theta(\mathbf{r}) - q\mathbf{A}] |\psi|^2$$

Avec la relation entre \mathbf{j} et le vitesse \mathbf{v}_s des charges supraconductrices,

$$\mathbf{j} = |\psi|^2 q \mathbf{v}_s$$

le remplacement du terme entre crochet dans la première relation et la simplification par $\psi(\mathbf{r})$, nous avons:

$$|\psi|^2 = -\frac{\alpha}{\beta} \left[1 + \frac{1}{2} m v_s^2 \right] = -\frac{\alpha}{\beta} \left[1 - \frac{1}{2} |\alpha| m v_s^2 \right]$$

En tenant compte des expressions de ξ et $|\psi|$ en fonction de α et β et en particulier:

$$\xi^2(T) = \frac{\hbar^2}{2m|\alpha(T)|} \quad \text{et} \quad |\psi_\infty|^2 = -\frac{\alpha}{\beta}$$

nous avons, lorsque la densité de paires est constante, une nouvelle relation entre la densité de paire et leur vitesse:

$$|\psi|^2 = |\psi_\infty|^2 \left[1 - \frac{\xi^2 m^2}{\hbar^2} v^2 \right]$$

VII-9 Densité de courant critique

Chercher la densité de courant critique, c'est chercher pour quelle densité de courant maximale $j = J_c$, les équations de Ginzburg-Landau n'ont d'autres solutions que la solution triviale $\psi = 0$. [POO-p.132]

Nous allons examiner ce problème en nous limitant au cas où la fonction d'onde ψ est de norme constante, c'est à dire en nous plaçant dans le cadre développé § VII-3 et VII-8.

En réintroduisant la fonction $f = \sqrt{n \frac{\beta}{|\alpha|}}$ comme au paragraphe IV-4, et en

utilisant les relations du paragraphe précédent, on obtient la relation:

$$j = \frac{\hbar}{q \mu_0 \lambda^2 \xi} f \sqrt{1-f^2}$$

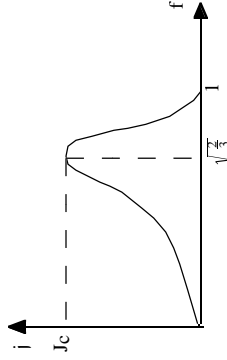


Figure 5

Variation de la densité de courant en fonction du paramètre d'ordre réduit f.

j apparaît comme une fonction de f, avec un maximum à $f = \sqrt{\frac{2}{3}}$ pour laquelle j atteint une valeur maximale J_c définie par:

$$J_c = \frac{2 \hbar}{3\sqrt{3} \pi q \mu_0 \lambda^2 \xi}$$

soit aussi en tenant compte de l'expression de H_c en fonction de λ et ξ du paragraphe précédent:

$$J_c = \frac{2 \sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \frac{H_c}{\lambda}$$

qui doit être comparé au $J_c = \frac{H_c}{\lambda}$ de la loi de introduit au chapitre II.

VIII- Effets de films minces

VIII-1 Aspects du problèmes

Le comportement des films minces a toujours été une curiosité de la supraconductivité et on se pose très vite la question de savoir ce qu'il se passe si l'épaisseur est plus petite que l'une des longueurs caractéristiques de la supraconductivité (λ et ξ), voire les 2.

C'est un problème que nous avons déjà abordé au § IV-4 du chapitre II avec une plaque d'épaisseur voisine ou inférieure à la longueur de London, sans à ce moment nous soucier de ξ qui n'avait pas été introduit et donc était supposé nul. Nous avions vu alors que le champ magnétique ne tombait pas à 0 dans l'échantillon, et même si $d \ll \lambda$, il reste proche du champ extérieur.

L'effet de film mince était réapparu au § V-7 du chapitre III, avec l'observation d'un renforcement du champ longitudinal que pouvait supporter une plaque supraconductrice. Ce renforcement était dû à la réduction du courant d'écrantage qui permet au champ de dépasser H_c sans que le courant d'écrantage n'atteigne J_c (critère de Sifsbee). La non plus, nous n'avions pas tenu compte de ξ , qui était supposé nul.

Pour aborder le cas de films très minces où l'épaisseur du film est petit devant les 2 longueurs critique, nous devons mettre en oeuvre une théorie qui contient fondamentalement ces deux grandeurs, et c'est ce que nous allons faire avec la théorie de Ginzburg-Landau.

VIII-3 Champ critique d'une plaque très mince

Considérons à la figure 6 une plaque très mince soumise à un champ magnétique dirigé suivant l'axe Oz.

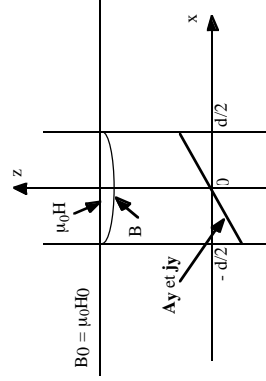


Figure 6:

Profils de champ magnétique, de potentiel vecteur et de densité de courant dans une plaque supraconductrice mince

Si l'épaisseur de la plaque est très faible devant ξ et λ , à la fois $|\psi|$ et \mathbf{B} seront uniforme et \mathbf{B} est égal au champ extérieur $B_0 = \mu_0 H_0 = \mu_0 H$

Le champ \mathbf{B} est appliqué suivant z dans le plan de la plaque dont l'épaisseur est suivant Ox. \mathbf{B} n'a qu'une composante B_z .

Le potentiel vecteur peut être choisi avec une seule composante suivant Oz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_0 H x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_0 H \end{pmatrix}$$

Ce qui de fait correspond à un choix de jauge de London avec:

$$\text{div } \mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{et la phase } \theta = \text{constante}$$

Ce qui signifie que non seulement $|\psi|$ est constant, mais ψ l'est aussi.

(voir § V-3 et V-4 du chapitre II et [TIN-p.124])

Et on a donc:

$$\mathbf{j} = - \frac{n q^2}{m} \mathbf{A}$$

ce que \mathbf{j} s'écoule suivant y avec par symétrie $\mathbf{j}(x) = \mathbf{j}(-x)$

La densité d'enthalpie libre dont l'expression générale est:

$$g_{sH} = f_{n0} + \alpha |\psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi|^4 + \frac{1}{2m} \sum_i \left[\hbar \nabla \psi - q \mathbf{A} \psi \right]^2 + \frac{B^2}{2 \mu_0} - \mathbf{H} \mathbf{B}$$

se réduit à:

$$g_{sH} = f_{n0} + \alpha |\psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi|^4 + \frac{\hbar^2 q^2 \mu_0^2}{2m} H^2 x^2 |\psi|^2 - \frac{H^2}{2 \mu_0}$$

L'enthalpie libre totale s'écrit:

$$G(H) = \int_{-d/2}^{+d/2} g_{sH} dx$$

est égale à :

$$G = d \left[f_{n0} + \alpha |\psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi|^4 + \frac{\hbar^2 q^2 \mu_0^2}{2m} H^2 \frac{d^3}{6} |\psi|^2 \right]$$

et sa minimisation par rapport à $|\psi|^2$ conduit à:

$$|\psi|^2 = \psi_\infty^2 \left[1 - \frac{d^2 H^2}{24 \lambda^2 H_c^2} \right]$$

Le film devient normal lorsque $|\psi| = 0$ soit [TIN-p.124]:

$$H_c // = 2 \sqrt{\frac{6}{d}} \lambda \quad H_c$$

Cette valeur est à rapprocher de celle du 6 V-7 du chapitre III, où les courants qui "tentent l'écrantage" sont réduits faute de place et:

- dans le langage du chapitre III n'atteignent J_c que pour un champ élevé

- dans le langage de ce chapitre, apportent peu d'énergie cinétique qui vient déstabiliser l'état supraconducteur.

VIII-3 Expérience de Little-Parks

Avertissement

Il s'agit d'une expérience particulièrement astucieuse qui englobe plusieurs phénomènes de la supraconductivité.

Avant d'entamer sa description, nous mettons en garde le lecteur que les courants dont nous allons parler ne sont plus de simples courants d'écrantage ou même des courants qui "tentent de l'écrantage", mais ce seront des courants "rattrapeur de phase" comme on en avait déjà rencontré lors de l'étude des effets de cohérence.

Description expérimentale

on dispose d'un filament cylindrique de polymère de 1 micromètre de diamètre, sur lequel on dépose une couche mince supraconductrice de type I, d'épaisseur $d = 250 \text{ \AA}$ et on applique un champ magnétique dans l'axe du cylindre.

En raison des longueurs relatives (figure 7):

$$d < \lambda < \xi.$$

- $|\psi|$ est constant dans le supraconducteur

- \mathbf{B} ne tombe pas à 0 dans l'épaisseur du supraconducteur et l'anneau ne joue aucun rôle d'écrantage.

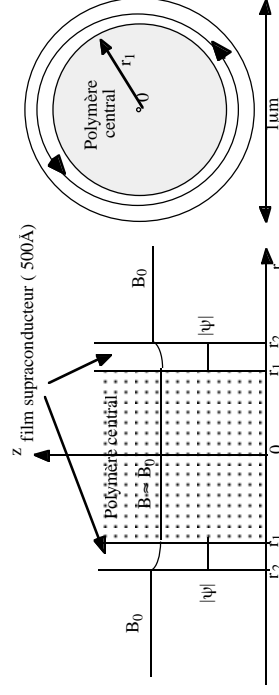


Figure 7: Champ magnétique et profil de $|\psi|$ dans un système composé d'un cylindre supraconducteur sur lequel un film supraconducteur très mince a été déposé.

Pour un champ B_0 de $10 \text{ Oe} = 10^{-3} \text{ T}$, le flux du champ magnétique dans le polymère central est: $\phi_1 = B_0 \pi r_1^2 = 0.795 \cdot 10^{-15} \text{ Weber}$, soit environ 1/2 fluxon ($\phi_0 = 2.07 \cdot 10^{-15} \text{ Weber}$)

Le flux à travers le polymère central + le matériau supraconducteur est 0.824 Weber, c'est à dire à peine plus élevé (3,5%) et n'offre qu'une correction petite par rapport à la valeur du fluxon.

On peut donc dire que le flux ϕ à travers tout circuit interne au supraconducteur est égal au flux à travers le polymère et est maîtrisable à quelques pour cent de fluxon est égal au flux ϕ à travers le polymère.

Contrainte de phase

Or nous savons que dans un supraconducteur, la phase la fonction d'onde est multiforme et que le déphasage acquis sur un parcours fermé qui entoure une singularité est un nombre entier de fois 2π .

En l'absence de jonctions Josephson, le déphasage résulte de la circulation de \mathbf{j} et de \mathbf{A} suivant la relation (§V-2 du chapitre VI):

$$\oint_{J(0)} \frac{m}{nq\hbar} \mathbf{j} \, d\mathbf{l} + \oint_{J(0)} \frac{q}{\hbar} \mathbf{A} \, d\mathbf{l} = 2s\pi$$

Et comme la circulation de \mathbf{A} à travers un circuit est égale au flux de \mathbf{B} à travers toute surface qui s'appuie sur ce circuit (avec $\phi_0 = h/q$):

$$\oint_{J(0)} \frac{m}{nq\hbar} \mathbf{j} \, d\mathbf{l} + \oint_{J(0)} \frac{q}{\hbar} \mathbf{B} \, d\mathbf{S} = \oint_{J(0)} \frac{m}{nq\hbar} \mathbf{j} \, d\mathbf{l} + 2\pi \frac{\phi}{\phi_0} = 2s\pi$$

où ϕ est le flux à travers le circuit qui est très voisin du flux dans le polymère.

Il n'y a donc qu'une seule façon d'ajuster la phase, c'est d'ajuster \mathbf{j} avec:

$$\oint_{J(0)} \frac{m}{nq\hbar} \mathbf{j} \, d\mathbf{l} = 2\pi \left(s - \frac{\phi}{\phi_0} \right)$$

Comparaison avec le SQUID à une jonction.

Avec le SQUID à une jonction, nous avons le même problème de rattrapage de phase, mais nous avons dans un circuit une jonction qui pouvait le faire en présence d'un courant i inférieur au courant critique de la jonction. Nous en avions même conclu que \mathbf{j} était très faible et que sa circulation n'apportait pas de changement de phase significatif.

Ici c'est tout à fait le contraire, il n'y a pas de jonction et le rattrapage de phase pèse totalement sur les épaules de la densité de courant.

Introduction de la vitesse des paires de Cooper

On peut remplacer \mathbf{j} par son expression en fonction de \mathbf{v}_s :

$$\mathbf{j} = | \psi \square \square |^2 q \mathbf{v}_s = nq \mathbf{v}_s$$

qui conduit à:

$$\oint \frac{m}{\hbar} \mathbf{v}_s \, d\mathbf{l} = 2\pi \left(s - \frac{\phi}{\phi_0} \right)$$

et donc puisque le circuit est pratiquement de rayon r_1 :

$$\mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{r_1 m} \left(s - \frac{\phi}{\phi_0} \right)$$

\mathbf{v}_s va donc varier périodiquement avec ϕ entre 0 lorsque $\phi = s\phi_0$ et $\frac{\hbar}{2r_1 m}$ lorsque $\phi = (s+1/2)\phi_0$.

oscillation de la température de transition

Or, il se trouve que \mathbf{v}_s modifie légèrement la température de transition T_c et c'est à travers la périodicité avec ϕ de la température de transition que Little et Parks ont démontré ce phénomène.

oscillation de la longueur de corrélation

De plus à la température de transition, $|\psi|$ devient nul et en raison de la relation:

$$|\psi|^2 = |\psi_\infty|^2 \left[1 - \frac{\xi^2 m^2}{\hbar^2} v_s^2 \right]$$

qui est valable parce que $d < \xi$ et $|\psi| = \text{constante}$:

$$\frac{1}{\xi^2} = \frac{m v_s^2}{\hbar^2} = \frac{1}{r_1^2} \left(s - \frac{\phi}{\phi_0} \right)^2$$