

CHAPITRE VIII

Champs critiques et réseaux de vortex en théorie de Ginzburg-Landau

I Energie de Paroi

I-1 Pertinence de la théorie de Ginzburg-Landau

Nous avons maintenant, avec la théorie de Ginzburg-Landau; un couple d'équations censé intégrer simultanément tous les effets de la supraconductivité (y compris les effets de cohérence). Nous allons la mettre en oeuvre pour décrire ce qui se passe à l'interface normal-supraconducteur, puis au sein d'un vortex.

Sauf indication contraire, nous n'examinerons que le comportement d'échantillons infiniment longs où les effets de forme et de champ démagnétisant n'apparaissent pas.

I-2 Enthalpie libre de paroi (BUR-p.32)

Au voisinage de sa surface, le paramètre d'ordre ψ d'un supraconducteur passe d'une valeur nulle à sa valeur massive $\psi_\infty(T)$ sur une distance $\xi(T)$. Le champ \mathbf{B} passe quant à lui, de B^0 (plus généralement \tilde{B}) à 0 sur la distance $\lambda(T)$.

Nous allons comparer les enthalpies libres de deux situations:

- Une situation idéalisée à passage vide/supraconducteur abrupt : $\lambda=0$ et $\xi=0$ (figure 1-a)
- La situation réelle où le passage est progressif et obéit aux équations de Ginzburg-Landau. (figure 1-b)

La différence entre les deux enthalpies libres sera appelée enthalpie libre de surface.

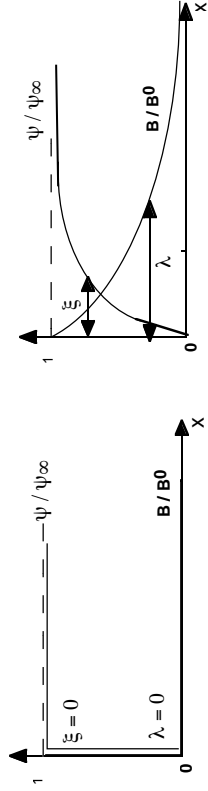


Figure 1-a Passage vide/supraconducteur abrupt Figure 1-b: Passage vide/supraconducteur réel ξ et λ sont différents de 0.

Rappelons les relations de base du système thermodynamique "matière + solénoïde"

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{H}_0 && \text{(il n'y pas d'effet de forme)} \\ \mathbf{g} &= \mathbf{f} - \mathbf{B} \mathbf{H} && \text{soit en champ nul: } \mathbf{g}_{S0}(\mathbf{r}) = \mathbf{f}_{S0}(\mathbf{r}) \text{ et } \mathbf{g}_{N0}(\mathbf{r}) = \mathbf{f}_{N0} \\ \mathbf{f}_{S0\infty} - \mathbf{f}_{N0} &= \mathbf{g}_{S0\infty} - \mathbf{g}_{N0} = -\mu_0 \frac{\mathbf{H}_c^2}{2} \\ d\mathbf{g} &= -s\mathbf{dT} - \mathbf{B} d\mathbf{H} \end{aligned}$$

Densité d'enthalpie libre d'un système à passage N-S abrupt

Le système prend ses valeurs ∞ (aussi bien pour ψ que pour les fonctions thermodynamiques) dès que l'on pénètre dans le supraconducteur. \mathbf{B} passe lui aussi subitement de B^0 à 0, lorsque l'on franchit la frontière vide/supraconducteur.

$$\mathbf{g}_{S0}(\mathbf{r}) = \mathbf{g}_{S0,\infty} = \mathbf{g}_{N0} - \mu_0 \frac{\mathbf{H}_c^2}{2} = \mathbf{f}_{N0} - \mu_0 \frac{\mathbf{H}_c^2}{2} \text{ pour tout } \mathbf{r}.$$

par ailleurs $dg = 0$ (à température constante) car partout $\mathbf{B} = 0$, et donc:

$$\mathbf{g}_{SH}(\mathbf{r}) = \mathbf{g}_{SH,\infty} = \mathbf{f}_{N0} - \mu_0 \frac{\mathbf{H}_c^2}{2} \quad (\text{Il n'y a pas de terme } +\mu_0 \frac{\mathbf{H}^2}{2} \text{ comme au}$$

chapitre V car ici le système contient le solénoïde)

Densité d'enthalpie libre d'un système à passage N-S réel

Elle satisfait à l'équation générale établie au paragraphe V-4 du chapitre VII:

$$\mathbf{g}_{SH} = \mathbf{f}_{N0} + \alpha |\psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi|^4 + \frac{1}{2m} \left| \frac{\hbar}{i} \nabla \psi - q\mathbf{A} \psi \right|^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} - \mathbf{H} \mathbf{B}$$

La différence d'énergie sous le champ appliqué $\mathbf{H} = \mathbf{H}^0$ entre les 2 configurations s'écrit:

$$\sigma(\mathbf{H}) = \int_0^\infty (\mathbf{g}_{SH} - \mathbf{g}_{SH\infty}) dx$$

soit en explicitant les enthalpies libres:

$$\sigma(\mathbf{H}) = \int_0^\infty \left(\alpha |\psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi|^4 + \frac{1}{2m} \left| \frac{\hbar}{i} \nabla \psi - q\mathbf{A} \psi \right|^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} - \mathbf{H} \mathbf{B} + \mu_0 \frac{\mathbf{H}_c^2}{2} \right) dx$$

Rappelons que $\psi(\mathbf{r})$, $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ et $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ dépendent de la position alors que \mathbf{H} n'en dépend pas. En raison de la forme de cylindre infini de l'échantillon, \mathbf{H} est égal au champ appliqué $\mathbf{H}^0 = B^0/\mu_0$.

Cette grandeur σ est appelée enthalpie libre de surface ou enthalpie libre de paroi.

I-3 Mise en forme de l'enthalpie libre de paroi

On peut vérifier que la première équation de Ginzburg-Landau multipliée par ψ^* et intégrée conduit à :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\alpha |\psi|^2 + 2\beta |\psi|^4 + \frac{1}{2m} \left| \hbar \nabla \psi - q\mathbf{A} \psi \right|^2 \right) dx = 0$$

ce qui permet d'écrire :

$$\sigma(H) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\beta |\psi|^4 + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + \frac{\mathbf{H}_c^2}{2\mu_0} \right) dx$$

ou en tenant compte de :

$$|\psi_\infty|^2 = -\frac{\alpha}{\beta} \quad \text{et} \quad \mu_0 \frac{\mathbf{H}_c^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha^2}{\beta} \right)$$

$$\sigma(H) = \mu_0 \frac{\mathbf{H}_c^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\left(\frac{|\psi|}{|\psi_\infty|} \right)^4 + \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0^2 \mathbf{H}_c^2} - \frac{2\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{\mu_0 \mathbf{H}_c^2} + 1 \right) dx$$

I-4 Analyse de l'enthalpie libre de paroi

En regroupant différemment les termes, $\sigma(H)$ peut aussi s'écrire :

$$\sigma(H) = \mu_0 \frac{\mathbf{H}_c^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{|\psi|}{|\psi_\infty|} \right)^4 \right) dx + \mu_0 \frac{\mathbf{H}_c^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0^2 \mathbf{H}_c^2} - \frac{2\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{\mu_0 \mathbf{H}_c^2} \right) dx$$

$\sigma(H)$ se présente alors comme la somme d'un premier terme faisant apparaître seulement la fonction $|\psi|$ et d'un second terme qui s'exprime en fonction uniquement des grandeurs magnétiques \mathbf{H} et \mathbf{B} . Il n'y a pas de termes croisés qui contiendraient de manière inséparable les deux types de grandeurs, ce qui va faciliter l'analyse de $\sigma(H)$, même s'il ne faut pas oublier que les profils de $|\psi|$ et de \mathbf{B} sont liés par les équations de Ginzburg-Landau. On ne peut pas calculer le profil de $|\psi|$ comme si \mathbf{B} n'existait pas puis, indépendamment, le profil de \mathbf{B} comme si $|\psi|$ était toujours réduit à sa valeur $|\psi_\infty|$.

i) Différence d'enthalpie de condensation :

$$\mu_0 \frac{\mathbf{H}_c^2}{2} \int_0^{\infty} \left(1 - \left(\frac{|\psi|}{|\psi_\infty|} \right)^4 \right) dx$$

Ce terme ne dépend que du profil de $|\psi|$. Il est positif et d'autant plus petit que $|\psi|$ croît rapidement lorsqu'on pénètre dans le supraconducteur, c'est-à-dire d'autant plus que ξ est petit. C'est un déficit d'énergie de condensation. Il est voisin de :

$$\frac{\mathbf{H}_c^2}{2\mu_0} \xi$$

ii) Différence d'enthalpie magnétique

$$\mu_0 \frac{\mathbf{H}_c^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0^2 \mathbf{H}_c^2} - \frac{2\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{\mu_0 \mathbf{H}_c^2} \right) dx$$

Ce terme ne dépend que du profil du champ magnétique.

Pour comprendre ce terme, supposons simplement que le profil de \mathbf{B} est de la forme :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} e^{-x/\lambda}$$

(se souvenir que dans la géométrie d'échantillon cylindrique infini : $\mu_0 \mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{H}^0 - \mathbf{B}^0 = \tilde{\mathbf{B}}$) qui conduit à une différence d'enthalpie magnétique de :

$$-\mu_0 \frac{\mathbf{H}^2}{2} \frac{7\lambda}{4}$$

Ainsi, à de petits coefficients près, $\sigma(H)$ est voisin de :

$$\sigma(H) = \mu_0 \frac{\mathbf{H}_c^2}{2} \xi - \mu_0 \frac{\mathbf{H}^2}{2} \lambda$$

qui est un résultat en parfait accord avec l'analyse du chapitre V consacré aux supraconducteurs de type II : ($\kappa = \lambda/\xi$) :

l'énergie de paroi est positive pour $H < H_c / \sqrt{\kappa}$
 l'énergie de paroi est négative pour $H > H_c / \sqrt{\kappa}$

Ainsi l'énergie de paroi positive en champ nul décroît avec le champ \mathbf{H} . Elle sera négative pour un champ H inférieur au champ critique H_c si $\kappa > 1$. En cas contraire elle sera encore positive à H_c et l'échantillon passera à l'état normal sans avoir vu l'apparition de vortex.

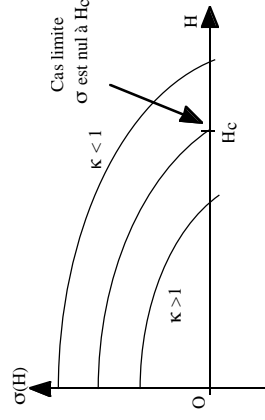


Figure 2

Evolution de l'énergie de paroi avec le champ \mathbf{H} .

I-5 Critère de Ginzburg-Landau

La motivation de Landau était de déterminer dans quelles conditions $\sigma(H)$ devenait négatif avant que l'échantillon perde ses propriétés supraconductrices, c'est-à-dire avant que H atteigne H_c . Puisque $\sigma(H)$ décroît de façon monotone avec H , il suffit de regarder son signe à $H=H_c$ (cas limite de la figure 2)

En remplaçant H par H_c dans l'expression du paragraphe VIII-3 du chapitre précédent et en regroupant les termes, on trouve que $\sigma(H_c)$ peut se mettre sous la forme:

$$\sigma(H_c) = \mu_0 \frac{H_c^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(- \left(\frac{|\psi|}{|\psi_\infty|} \right)^4 + \frac{(\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{H}_c)^2}{\mu_0^2 H_c^2} \right) dx$$

et son signe revient à celui de δ :

$$\delta = \int_{-\infty}^{\infty} \left(- \left(\frac{|\psi|}{|\psi_\infty|} \right)^4 + \frac{(\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{H}_c)^2}{\mu_0^2 H_c^2} \right) dx$$

Les bons auteurs (TIN-p.116) nous disent que δ peut être évalué numériquement. Différents cas limites sont proposés mais la conclusion essentielle reste que

$$\delta \propto (\xi - \lambda)$$

qui traduit le résultat du paragraphe précédent.

Rappelons que ce calcul est celui d'un système unidimensionnel et convient bien pour une surface plane.

II Les vortex

II-1 Expression générale de l'enthalpie de formation d'un vortex

L'enthalpie libre de formation d'un vortex est égale à la différence entre l'enthalpie libre du système sans le vortex et celle du système et avec le vortex. Le vortex se plaçant au coeur de l'échantillon et loin des bords, les densités d'enthalpies libres s'écrivent:

$$g_{sH}(\text{sans vortex}) = f_{n0} + \alpha |\psi_\infty|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi_\infty|^4$$

$$g_{sH}(\text{avec vortex}) = f_{n0} + \alpha |\psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi|^4 + \frac{1}{2m} \left| \frac{\hbar}{i} \nabla \psi - q\mathbf{A} \psi \right|^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{2} - \mathbf{H}\mathbf{B}$$

où \mathbf{H} est le champ extérieur \mathbf{H}^0 (échantillon cylindre infini) et les champs \mathbf{A} et \mathbf{B} sont ceux associés au vortex. L'enthalpie de formation s'écrit:

$$\Delta G(\text{formation de vortex}) = \int [f_{sH}(\text{sans vortex}) - f_{sH}(\text{sans vortex})] d\mathbf{r}$$

Nous pouvons faire apparaître ΔG comme la somme de trois termes:

$$\Delta G_{cf} = \int \left[(\alpha |\psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi|^4) - (\alpha |\psi_\infty|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi_\infty|^4) \right] d\mathbf{r}$$

$$\epsilon_1 = \int \left[\frac{1}{2m} \left| \frac{\hbar}{i} \nabla \psi - q\mathbf{A} \psi \right|^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right] d\mathbf{r}$$

$$\Delta G_d = \int -\mathbf{H}\mathbf{B} d\mathbf{r}$$

qui sont précisément ceux que nous avons considérés au paragraphe VIII-2 du chapitre V et que nous avons nommés:

- *Enthalpie libre de condensation du coeur.*
- *Energie libre de formation à l'infini et en champ nul du vortex.*
- *Enthalpie libre de déplacement du vortex, de l'infini au champ H déjà préétabli.*

Effectuons quelques remarques:

La théorie de Ginzburg-Landau confirme l'analyse du chapitre V et permet en principe d'effectuer un calcul plus rigoureux que celui que nous avons fait, notamment en tenant compte de la symétrie cylindrique à deux dimensions du problème. Au chapitre V, nous avons simplement utilisé des profils de ψ et \mathbf{B} trouvés dans des calculs à une dimension.

Elle renferme en son sein la nécessité de la quantification du flux que nous n'aurons pas à rajouter. A la lumière du chapitre précédent, les équations de Ginzburg-Landau intègrent les effets de cohérence par le terme $(\frac{\hbar}{i} \nabla \psi - q\mathbf{A} \psi)$.

A la différence du chapitre V, le terme de déplacement s'écrit ici - $\mathbf{H}\mathbf{B}$ car la variable extensive est le champ magnétique \mathbf{B} , (le système contient le grand solénoïde alors qu'au chapitre V, il ne le contenait pas et la variable extensive était \mathbf{I}).

II-2 Résolution des équations de Ginzburg-Landau

Avant d'effectuer les calculs de chacune des contributions et le bilan de l'opération, il faut déterminer les profils de ψ et \mathbf{A} qui satisfont aux équations de Ginzburg-Landau, à la symétrie du problème et aux conditions aux limites.

Vu la symétrie cylindrique du problème, nous cherchons des solutions de la forme:

$$\psi = \psi_\infty f(r) e^{i s \theta} \quad \text{et} \quad \mathbf{A} = A_\theta(\mathbf{r})$$

-Cette forme de ψ conduit à une densité de paire radiale et à $\psi(\theta) = \psi(\theta + 2\pi)$

-Cette forme de \mathbf{A} assure que \mathbf{B} sera suivant z et ne dépendra que de r comme l'exige la symétrie du problème (c'est partiellement un choix de jauge).

1^{re} équation de Ginzburg-Landau

Elle s'écrit directement:

$$f - f^3 - \xi^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{2\pi A}{\phi_0} \right)^2 - \frac{1}{r} \left(\frac{df}{dr} \right) = 0$$

2^{ème} équation de Ginzburg-Landau

En remplaçant ψ par son expression, la 2^{ème} équation de Ginzburg-Landau mise

sous la forme:

$$\mathbf{j} - \frac{q^2 \mathbf{A}}{m} |\psi|^2 = \frac{i\hbar q}{2m} [\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi]$$

devient:

$$j_\theta(r) + \frac{q^2 A_\theta(r)}{m} |\psi_\infty|^2 f(r)^2 = \frac{\hbar q}{2m} s \frac{f(r)^2}{r} |\psi_\infty|^2 u_\theta$$

j_θ , A_θ et u_θ sont les uniques composantes au point r des vecteur \mathbf{j} , \mathbf{A} et d'un vecteur unitaire \mathbf{u} . On se souvient en coordonnées cylindriques de : $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$

A l'infini, la grandeur physique \mathbf{j} tend vers 0 et on a donc:

$$A_\theta(\infty) = \frac{\hbar s}{2mq r}$$

Le flux de \mathbf{B} à travers un cercle qui entoure le vortex et dont le diamètre est suffisamment grand pour que \mathbf{j} soit nul sur son pourtour est la circulation de \mathbf{A} sur ce même cercle, soit:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} A_\theta(\infty) 2\pi r \, dr = \int_0^{2\pi} \frac{\hbar s}{2mq r} 2\pi r \, dr = s \phi_0$$

ce qui redonne bien la quantification du flux à travers un vortex. Pour avoir un seul fluxon (ce qui sera justifié plus loin), on choisit $s = 1$.

$$j_0 = - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial r} = \frac{q\hbar}{m} |\psi_\infty|^2 f^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{2\pi A}{\phi_0} \right)$$

II-3 Résolution des équations

La résolution ne peut être que numérique ou acquise à coup d'approximations dans des cas limites.

On trouve par exemple un développement dans Tinkham (TIN-p.146)

Dans tous les cas de figure

$f(r) \approx \text{th} \left(\frac{\nu r}{\xi} \right)$ dans tout l'espace, où ν est un coefficient proche de 1. Cela signifie que $|\psi|^2$ croît à 2 dimension à partir de l'origine du vortex comme il le faisait à une dimension à partir de la surface (voir paragraphe VI-4 du chapitre VII).

Dans la limite de grands κ

Dans la limite des grands κ , ξ est petit et on peut considérer que presque partout $|\psi|^2 = |\psi_\infty|^2 = n = \text{constante}$.

On est donc amené à résoudre en coordonnées cylindriques l'équation:

$$\Delta \mathbf{B} - \frac{\mathbf{B}}{\lambda_L^2} = 0$$

ce que l'on a déjà fait au chapitre II (équation de Bessel modifiée $n=1$). Ses solutions sont:

$$B_z \left(\frac{r}{\lambda} \right) = \alpha I_0 \left(\frac{r}{\lambda} \right) + \beta K_0 \left(\frac{r}{\lambda} \right)$$

où I_0 diverge à l'infini et K_0 , la fonction de Hankel d'ordre 0 diverge à l' origine. Dans un milieu infini, la composante qui diverge à l'infini doit être éliminée et il reste:

$$B(r) = \frac{\phi_0}{2\pi \lambda^2} K_0 \left(\frac{r}{\lambda} \right)$$

qui a été normalisée de telle sorte que le champ ne renferme qu'un fluxon:

$$\int 2\pi r B(r) \, dr = \phi_0$$

Il est à noter que si \mathbf{B} diverge, l'intégrale reste finie et que on peut donc bien loger un fluxon à l'origine (nous avions fait silence sur ce point au chapitre II).

Cette façon d'aborder le problème est bien agréable car on connaît les solutions de l'équation, mais il manque tout de même de réalisme pour $r < \xi$, région dans laquelle les charges d'écrantage chutent à 0 de manière dramatique et ne peuvent pas assurer une variation aussi rapide de \mathbf{B} . Il est alors plus que raisonnable de penser que \mathbf{B} va saturer et ne pas prendre de valeur bien supérieure à $B(r = \xi)$.

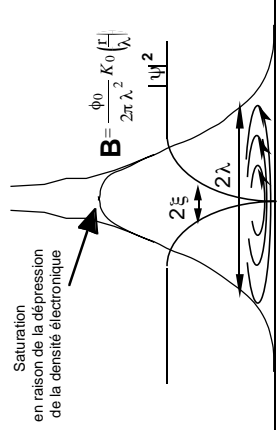


Figure 3

Profil d'un vortex \mathbf{B} saturé en deçà de $r = \xi$.

Le modèle le plus abrupt conduit à supposer que, pour $x < \xi$, il n'y a plus de courant supraconducteur: $\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} = 0$ et \mathbf{B} reste constant et égal à $B(\xi)$.

Un modèle qui tiendrait compte de la présence de courants supraconducteurs réduits mais non nuls pour $x < \xi$ conduirait plutôt à : $B(r) = C \left(1 - \left(\frac{r}{\xi} \right)^2 \right)$

Le profil se traduirait par:

$$B(r) = C \left(1 - \left(\frac{r}{\xi} \right)^2 \right) \quad \text{pour } r < \xi$$

$$B(r) = \frac{\phi_0}{2\pi \lambda^2} K_0 \left(\frac{r}{\lambda} \right) \quad \text{pour } r > \xi$$

avec deux développements raisonnables e la fonction de Hankel:

$$B(r) = \frac{\phi_0}{2\pi \lambda^2} \left(\ln \frac{\lambda}{r} + 0.12 \right) \quad \text{pour } \xi \ll r \ll \lambda$$

$$B(r) = \frac{\phi_0}{2\pi \lambda^2} \sqrt{\frac{\pi \lambda}{2r}} \exp - \left(\frac{r}{\lambda} \right) \quad \text{pour } r \rightarrow \infty$$

En toute rigueur, il faut renormaliser \mathbf{B} car en introduisant une saturation en dessous de ξ , on a diminué le flux de \mathbf{B} qui n'est plus alors tout à fait un fluxon. Si ξ est petit, ça reste une correction mineure.

III Champ critique H_{c1}

III-1 Calcul de H_{c1}

Les profils de \mathbf{B} , \mathbf{A} , ψ étant trouvés, on peut calculer plus précisément le terme ϵ_1 d'énergie libre de formation d'un vortex. L'énergie interne du supraconducteur s'écrivant:

$$U = \frac{1}{2 \mu_0} \int [\mathbf{B}^2 + \lambda^2 (\text{rot } \mathbf{B})^2] d\mathbf{r}$$

Nous allons le montrer au paragraphe suivant, on obtient l'énergie de formation d'un vortex:

$$\epsilon_1 = \frac{\phi_0^2}{4\pi \lambda^2} \ln \left(\frac{\lambda}{\xi} \right)$$

et en reproduisant la démarche du paragraphe VIII du chapitre V, on trouve pour H_{c1} :

$$H_{c1} = \frac{\phi_0}{4\pi \mu_0 \lambda^2} \ln \left(\frac{\lambda}{\xi} \right)$$

III-2 Equation de Gauss généralisée

Le calcul de ϵ_1 requiert une équation de London généralisée que nous allons introduire par l'équation locale de Gauss généralisée d'un système composé d'une charge électrique ponctuelle. Cela paraît bien loin de notre problème, mais dans un premier temps ce sera plus parlant.

D'un système composé d'une charge ponctuelle Q placée à l'origine, nous savons deux choses:

- le champ $\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \mathbf{u}$ où \mathbf{u} est le vecteur unitaire porté par \mathbf{r}

-div $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$ où $\rho(\mathbf{r})$ est la densité de charge au point \mathbf{r} (forme locale du théorème de Gauss).

Si on oublie l'origine, $\rho(\mathbf{r}) = 0$ partout et le champ électrique vérifie $\text{div } \mathbf{E} = 0$.

Cependant, à partir de la seule équation $\text{div } \mathbf{E} = 0$, on ne peut pas déduire le champ électrique puisqu'il nous manque une information: il y a une charge Q à l'origine.

Pour préciser qu'il y a une charge Q à l'origine, il faut généraliser cette équation et l'écrire au sens des distributions (de Schwartz) en présentant une charge ponctuelle localisée en \mathbf{r}_0 comme une densité de charge $\rho(\mathbf{r}) = Q \delta_3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$, où $\delta_3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \delta(x-x_0)$

$\delta(y-y_0) \delta(z-z_0)$ est la distribution de Dirac à 3 dimensions centrée en \mathbf{r}_0 . La propriété fondamentale de $\delta_3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$ est que pour toute fonction $f(\mathbf{r})$ continue en $\mathbf{r}_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$\int_{\text{espace}} f(\mathbf{r}) \delta_3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = f(\mathbf{r}_0) \quad \text{et en particulier} \quad \int_{\text{espace}} \delta_3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = 1$$

ce qui s'énonce ainsi: le produit de convolution d'une distribution de Dirac par une fonction est égal à la valeur de la fonction au point où est centrée la distribution de Dirac. En raison du support ponctuel de δ_3 , les relations restent vraies si les intégrales portent sur un volume fini qui contient \mathbf{r}_0 :

$$\int_{V(\mathbf{r}_0 \in V)} f(\mathbf{r}) \delta_3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = f(\mathbf{r}_0)$$

Intuitivement, $\delta_3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \delta(z-z_0)$ peut être vue comme une courbe en cloche infiniment ramassée sur \mathbf{r}_0 (donc nulle partout ailleurs) dont l'aire sous la courbe vaut 1.

L'équation généralisée s'écrit alors:

$$\text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q \delta(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

et l'application de la propriété fondamentale:

$$\int_{V(\mathbf{r}_0 \in V)} \text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_{V(\mathbf{r}_0 \in V)} \frac{Q \delta(\mathbf{r})}{\epsilon_0} d\mathbf{r} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Si on ajoute la relation de Green-Ostrogradski on obtient:

$$\oint_{\text{Surface qui délimite } V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{V(\mathbf{r}_0 \in V)} \text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

où l'intégrale s'effectue sur la surface qui entoure le volume considéré.

Cette équation n'est autre que le théorème de Gauss sous sa forme intégrale.

L'équation généralisée nous indique donc que la densité de charge en tout point de l'espace est nulle sauf à l'origine où se trouve la charge Q et où elle vaut $\rho(\mathbf{r}) = Q \delta_3(\mathbf{r})$. Elle contient toute l'information et en particulier celle qui nous manque: le facteur d'échelle constitué de la valeur de la charge.

III-3 Equation de London généralisée

L'équation de London s'écrit en tout point d'un supraconducteur où règnent à la fois un champ magnétique et une densité de courant:

$$\mathbf{B} + \mu_0 \lambda^2 \text{rot } \mathbf{j} = 0$$

Cette équation est en particulier vérifiée au voisinage d'un vortex, sans pour autant ne nous apporter de précisions sur le vortex et il nous manque en particulier le facteur d'échelle que représente le flux de champ magnétique porté par le vortex.

Par similitude avec le cas de la charge ponctuelle développé au paragraphe précédent, nous généralisons cette équation à:

$$\mathbf{B} + \mu_0 \lambda^2 \text{rot } \mathbf{j} = \phi_0 \delta_2(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$$

où $\delta_2(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = \delta(x-x_0) \delta(y-y_0)$ est la fonction de Dirac à deux dimensions (dans le plan perpendiculaire à la ligne de vortex dirigée suivant Oz) centrée en un point $\mathbf{r}_0(x_0, y_0)$ de ce plan. $\delta_2(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$ satisfait à:

$$\int_{V(\mathbf{r}_0 \in V)} f(x,y,z) \delta_2(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = f(x_0, y_0, z)$$

En choisissant un volume V intérieur à une surface latérale cylindrique \mathbf{S} entourant le vortex, nous avons pour une longueur dz de vortex:

$$dV = dx dy dz \quad \text{avec} \quad dx dy = \text{élément de surface de base du cylindre.}$$

$d\mathbf{S}$ =élément de surface latérale orientée dans le sens de la normale sortante

qui nous assure que le vortex placé en \mathbf{r}_0 porte le flux ϕ_0 puisque pour une longueur de vortex L :

$$\begin{aligned} \int_{V(\mathbf{r}_0 \in V)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} &= \int_{V(\mathbf{r}_0 \in V)} \mathbf{B} \cdot dx dy dz + \int_{V(\mathbf{r}_0 \in V)} \mu_0 \lambda^2 \text{rot } \mathbf{j} \cdot dx dy dz \\ &= \int_{V(\mathbf{r}_0 \in V)} \phi_0 \delta_2(\mathbf{r}) dx dy dz = L \int_{\text{surface de base}} \phi_0 \delta_2(\mathbf{r}) dx dy = L \phi_0 \end{aligned}$$

soit:

$$L \int_{\text{surface de base}} \mathbf{B} \cdot dx dy + L \int_{\text{surface de base}} \mu_0 \lambda^2 \text{rot } \mathbf{j} \cdot dx dy$$

Puisque $dx dy = d\mathbf{S}_{\text{base}}$ est l'élément de surface de base, l'application du théorème de Stokes-Ampère à une section du cylindre délimitée par un contour Γ conduit à :

$$\int_{\text{surface de base}} \text{rot } \mathbf{j} \cdot dx dy = \int_{\text{circuit } \Gamma \text{ entourant le vortex}} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{l}$$

et finalement:

$$\int_{\text{surface de base}} \mathbf{B} \cdot dx dy + \int_{\text{circuit } \Gamma \text{ entourant le vortex}} \mu_0 \lambda^2 \mathbf{j} \cdot d\mathbf{l} = \phi_0$$

Si le contour est assez ample autour du vortex, l'intégrale sur le circuit est nulle et l'intégrale sur la surface de base est le flux de tout le champ \mathbf{B} associé au vortex.

Si le circuit n'est pas assez ample, on perd sur le flux de \mathbf{B} mais on récupère sur la circulation de \mathbf{j} ; enfin on retrouve intimement liées deux bonnes façons de faire du déphasage comme nous l'avions vu au chapitre VI.

III-4 Calcul de ϵ_1

On peut maintenant revenir à la détermination de ϵ_1 :

$$\epsilon_1 = \frac{1}{2 \mu_0} \int \mathbf{B}^2 + \lambda^2 (\mathbf{rot} \mathbf{B})^2 \, dr$$

où \mathbf{B} est la seule contribution du vortex

Comme au paragraphe VIII-3 du chapitre II, on transforme cette intégrale en tenant compte de l'équation $\mathbf{div}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w}$

avec $\mathbf{w} = \mathbf{B}$ et $\mathbf{u} = \mathbf{rot} \mathbf{B}$.

Cela conduit à:

$$(\mathbf{rot} \mathbf{B})^2 = -\mathbf{div}(\mathbf{rot} \mathbf{B} \wedge \mathbf{B}) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{B}).$$

$$\epsilon_1 = \frac{1}{2 \mu_0} \int_{\text{espace}} \mathbf{B}(\mathbf{B} + \lambda^2 \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{B}) \, dr + \int_{\text{espace}} \mathbf{div}(\mathbf{B} \wedge \mathbf{rot} \mathbf{B}) \, dr$$

puis avec $\mathbf{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$

$$\epsilon_1 = \frac{1}{2 \mu_0} \int_{\text{espace}} \mathbf{B}(\mathbf{B} + \mu_0 \lambda^2 \mathbf{rot} \mathbf{j}) \, dr + \int_{\text{espace}} \mathbf{div}(\mathbf{B} \wedge \mathbf{j}) \, dr$$

Si l'espace est un cylindre dont le vortex est l'axe central, la deuxième intégrale peut se transformer en intégrale de surface (théorème de Green) où la surface est celle du cylindre. Si on prend le rayon du cylindre assez grand, ce terme est nul puisque \mathbf{B} et \mathbf{j} décroissent exponentiellement vers 0.

Reste seulement le premier terme et U se réduit à:

$$\epsilon_1 = \frac{1}{2 \mu_0} \int_{\text{espace}} \mathbf{B}(\mathbf{B} + \mu_0 \lambda^2 \mathbf{rot} \mathbf{j}) \, dr$$

avec $dr = L \, dx \, dy$ on a pour une longueur L de vortex:

$$\epsilon_1 = \frac{1}{2 \mu_0} \int_{\text{espace}} \mathbf{B}(\mathbf{B} + \mu_0 \lambda^2 \mathbf{rot} \mathbf{j}) \, dr$$

$$= \frac{L}{2 \mu_0} \int_{\text{surface de base}} \mathbf{B}(x,y) \phi_0 \delta_2(x,y) \, dx \, dy = \frac{\mathbf{B}(x,y=0)}{2 \mu_0} \phi_0$$

et puisque en raison de la saturation de \mathbf{B} pour $x < \xi$:

$$\mathbf{B}(0) = \mathbf{B}(\xi) = \frac{\phi_0}{2\pi \lambda^2} K_0 \left(\frac{\xi}{\lambda} \right)$$

et:

$$\epsilon_1 = \frac{\phi_0^2}{4 \mu_0 \pi \lambda^2} K_0 \left(\frac{\xi}{\lambda} \right) \approx \frac{\phi_0^2}{4 \mu_0 \pi \lambda^2} \ln \left(\frac{\lambda}{\xi} \right)$$

V- Champs critiques supérieurs H_{c2}

IV-1 Vortex au voisinage de H_{c2}

Au chapitre V, nous avons défini le champ critique H_{c2} comme celui à partir duquel les coeurs de vortex devenaient tangents.

On peut imaginer maintenant que le profil de $|\psi|$ évolue entre H_{c1} et H_{c2} comme représenté sur la figure 4.

- A H_{c1} , il y a apparition de vortex dont les zones de London sont presque tangentes, mais dont les coeurs sont suffisamment éloignés pour que, entre chacun d'entre eux, le paramètre d'ordre $|\psi|$ atteigne $|\psi_\infty|$.

- Lorsque le champ croît, le nombre de vortex augmente (puisque chacun ne peut porter qu'un fluxon) et donc la distance qui les sépare diminue. $|\psi|$ n'atteint plus $|\psi_\infty|$.

- Au voisinage de H_{c2} , le phénomène se prononce. On est plus proche d'une fluctuation de ψ (avec les courants qui l'accompagnent) que de la présence de véritables vortex

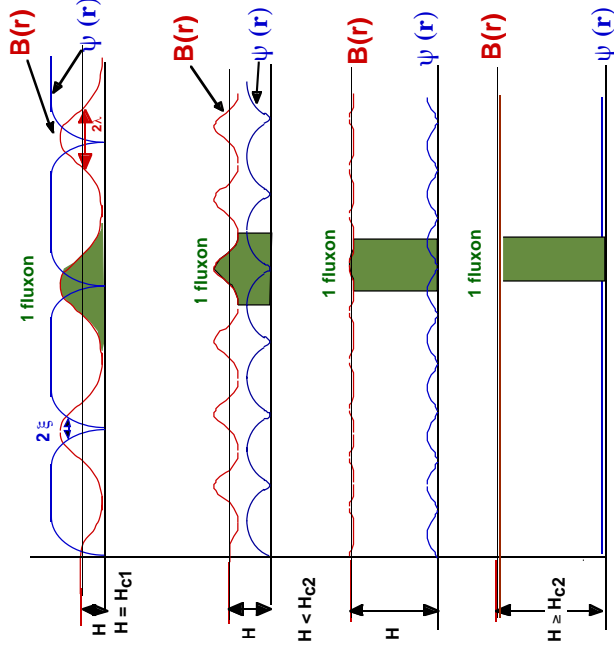


Figure 4:

Evolution des profils de \mathbf{B} , ψ lorsque le champ \mathbf{H} passe de H_{c1} à H_{c2}

\mathbf{H} est uniforme dans l'échantillon

On peut alors reprendre le problème en sens inverse: partir des champs très élevés et se demander à partir de quel champ les équations de Landau conduisent à une solution non uniformément nulle du paramètre d'ordre réduit f .

IV-2 Equation de Ginzburg-Landau linéarisée

Au voisinage de la transition à H_{c2} , ψ est petit, le terme en $|\psi|^4$ de l'énergie libre ou en $\psi|\psi|^2$ de la première équation de Ginzburg-Landau devient négligeable et cette équation se réduit à:

$$\alpha \psi - \frac{\hbar^2}{2m} \left[\nabla - \frac{iq\mathbf{A}}{\hbar} \right]^2 \psi = 0$$

soit, en remplaçant α par son expression en fonction de ξ :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\nabla - \frac{iq\mathbf{A}(\mathbf{r})}{\hbar} \right]^2 \psi(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m \xi^2(T)} \psi(\mathbf{r}) \quad \text{GL"1}$$

IV -3 Champ \mathbf{B} au voisinage de H_{c2}

Au voisinage de H_{c2} , le champ \mathbf{B} a deux caractéristiques:

- comme toutes les autres grandeurs il va présenter la périodicité d des vortex.
- il ne peut changer de façon significative que sur une distance au moins égale à la longueur de London λ .

Aussi avec $d \ll \lambda$, \mathbf{B} sera quasiment constant. C'est ce qui arrive pour un supraconducteur de type II dont $\xi \ll \lambda$ au voisinage de H_{c2} où $d \approx \xi$.

IV -4 Choix de jauge de \mathbf{A}

Puisque \mathbf{B} est constant et dirigé suivant z , un choix de jauge possible est d'affecter à \mathbf{A} la seule composante $A_y = H x$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_0 H x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_0 H \end{pmatrix}$$

L'équation linéarisée devient alors (à vérifier):

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\mathbf{r}) - \frac{iq\hbar}{2m} \mathbf{B} \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}) + \frac{\mu_0 q^2 \pi^2 H^2}{2m} x^2 \psi(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m \xi^2(T)} \psi(\mathbf{r})$$

Remarque:

Le choix de jauge dissymétrise x et y , ce qu'aurait évité un potentiel vecteur $\mathbf{A}(0, \mu_0 H x/2, -\mu_0 H y/2)$. Cette dissymétrisation doit être sans importance sur les résultats des grandeurs physiques (On peut imaginer que ce choix a effectué pour des raisons de résolution mathématique ?).

IV-4 Détermination de H_{c2}

Il s'avère que cette équation est bien connue des physiciens, notamment ceux qui ont étudié les niveaux de Landau d'une particule chargée dans un champ électromagnétique mais aussi plus simplement de ceux qui ont étudié l'oscillateur harmonique.

Elle se résout en cherchant une solution de la forme:

$$\psi(\mathbf{r}) = f(x) \exp i(k_y y + k_z z)$$

ce qui fait de f la norme de ψ .

Compte tenu de $\phi_0 = h/q$, et en posant:

$$x_0 = \frac{k_y \phi_0}{2\pi \mu_0 H}$$

on obtient:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{2\pi \mu_0 H}{\phi_0} \right)^2 (x - x_0)^2 f = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{\xi^2} - k_z^2 \right) f$$

Cette équation est tout à fait similaire à l'équation aux valeurs propres de l'opérateur hamiltonien de l'oscillateur harmonique (masse m attachée à un ressort) de constante k qui s'écrit:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{k}{2} (x - x_0)^2 \varphi = E \varphi$$

où x_0 est la position d'équilibre de la particule (position origine).

Les valeurs propres de cette équation sont :

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

la fonction d'onde du niveau $n=0$ s'écrit:

$$\varphi_0 = \left(\frac{m \omega_0}{\pi \hbar} \right)^{1/4} \exp - \left(\frac{m \omega_0}{2 \hbar} x^2 \right)$$

La résolution de notre problème passe par une analyse à l'envers de cette équation. Nous connaissons les valeurs propres: $\epsilon_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{\xi^2} - k_z^2 \right)$ (toujours la même expression) et nous ajustons l'équivalent de la constante de ressort $\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{2\pi \mu_0 H_n}{\phi_0} \right)^2$ (qui va dépendre de n).

En identifiant, il vient pour valeurs de H possibles:

$$H_n = \frac{\phi_0}{2\pi \mu_0 (2n + 1)} \left(\frac{1}{\xi^2} - k_z^2 \right)$$

La plus grande valeur de H_n , solution de cette équation, est celle pour laquelle $n=0$ et où $k_z=0$

Cette plus grande valeur de H_n est le champ H_{c2} que l'on cherche, soit:

$$H_{c2} = \frac{\phi_0}{2\pi \mu_0 \xi^2}$$

qui est simplement deux fois plus faible que celle que on avait déterminée en la présentant comme le champ pour lequel les coeurs de vortex devenaient tangents (Chapitre V).

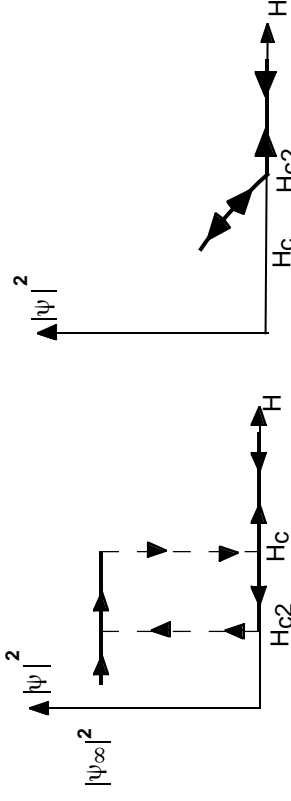
IV-6 H_{c2} dans les supraconducteurs de type I

Le calcul précédent est celui d'un champ de nucléation à partir d'une phase non supraconductrice à haut champ. Dans ce calcul il a été peu tenu compte du fait que le supraconducteur était de type II et correspondait à $\lambda / \xi > 1$. Tout au plus cela affaiblit l'argument de $B =$ constante, sans qu'il soit réfuté au voisinage de la nucléation où le paramètre d'ordre réduit reste très petit.

Cela signifie qu'on peut définir pour les supraconducteurs de type I le même champ de nucléation H_{c2} :

$$H_{c2} = \frac{\phi_0}{2\pi \mu_0 \xi^2}$$

avec la particularité que $H_{c2} = \sqrt{2} \kappa H_c$ est inférieur à H_c lorsque $\kappa < 1 / \sqrt{2}$, c'est-à-dire lorsque le supraconducteur est de type I.



a) Supraconducteur de type I: Transition du premier ordre à H_{c2} avec effets d'hystérésis b) Supraconducteur de type II: Transition du second ordre à H_c

Figure 5: Champ critique H_{c2}

Comme on le trouve dans Tinkham [TIN-p.129], cela est interprété dans le supraconducteur de type I par la présence d'un état normal surfondu par manque de nucléation. Lorsque l'on décroît le champ d'une valeur supérieure à H_c , aucune nucléation ne se produit tant que H n'a pas atteint H_{c2} inférieur à H_c . A H_{c2} une transition du premier ordre normal-supraconducteur se produit. Lors de la remontée sous champ, l'état supraconducteur n'a aucune raison de disparaître avant H_c . Il y a hystérésis(Figure 5-a).

Dans un supraconducteur de type II, on a H_{c2} une transition du second ordre et $|\psi|^2$ croît à partir de 0 et de façon réversible à partir de ce champ.

V Réseau d'Abrikosov de l'état de vortex à H_{c2}

V-1 Fonction d'onde

Toujours par analogie avec le problème de l'oscillateur harmonique et en se penchant maintenant sur l'équivalent de la fonction d'onde, on peut vérifier que:

$$f(x) = \exp - \frac{(x - x_0)^2}{2 \xi^2} \quad \text{avec} \quad x_0 = \frac{k_y \phi_0}{2\pi \mu_0 H}$$

$f(x)$ est gaussienne centrée en x_0 , ce qui fait des x_0 des composantes en x de centres de vortex au voisinage de H_{c2} :

$$\psi_{k_y}(x,y,z) = f_0 e^{ik_y y} \exp - \frac{(x - x_0)^2}{2 \xi^2} \quad x_0 = \frac{k_y \phi_0}{2\pi \mu_0 H}$$

A priori tous les k_y sont possible et la solution générale est une combinaison linéaires de toutes les possibilités de k_y .

On peut se demander si une solution particulière va l'emporter.

V-2 Choix de jauge (considérations de l'auteur)

Comme nous l'avons mentionné, nous avons plusieurs choix de jauges qui conduisent à un champ magnétique \mathbf{B} uniforme dans la direction Oz puisque:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_0 H x \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_0 H x/2 \\ -\mu_0 H y/2 \end{pmatrix} \text{ ou } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\mu_0 H y \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_0 H \end{pmatrix}$$

et dans la mesure où l'échantillon est supposé infini dans le plan (x,y) il n'y avait aucune raison de dissymétriser ces grandeurs, d'autant plus que cela a une incidence sur l'équation de f et sur ses solutions. Cela signifie que doivent apparaître des solutions générales combinaisons linéaires de solutions du type:

$$\psi_{k_x}(x,y,z) = f_0 e^{ik_x x} \exp\left(-\frac{(y-y_0)^2}{2\xi^2}\right) \quad y_0 = \frac{k_x \phi_0}{2\pi \mu_0 H}$$

Et puisque le choix de jauge est sans incidence sur les grandeurs physiques, hormis la phase de la fonction d'onde, les combinaisons linéaires de:

$$f_0 e^{ik_x y} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\xi^2}\right) \text{ et } f_0 e^{ik_x x} \exp\left(-\frac{(y-y_0)^2}{2\xi^2}\right)$$

doivent conduire au même résultat avec symétrisation du rôle de x et de y.

V-3 Stabilisation d'une solution particulière: critère d'Abrikosov

Si toutes les solutions sont parfaitement équivalentes à H_{c2} où ψ reste infiniment proche de 0, il n'en n'est plus de même immédiatement en dessous de H_{c2} où ψ croît et il faut tenir compte du terme $\beta |\psi|^4$ que nous avons évacué lors de la linéarisation.

Abrikosov a montré que la solution la plus stable était celle pour laquelle:

$$\beta_A = \frac{\langle \psi^4 \rangle}{\langle \psi^2 \rangle^2} \text{ est minimal.}$$

les valeurs moyennes étant calculées à partir des solutions de l'équation linéarisée.

V-4 Solution périodique et réseau de vortex

Comme nous verrons au prochain chapitre, les vortex se repoussent, ce qui conduit, comme souvent en physique, à une répartition périodique.

La solution la plus générale étant une combinaison linéaire des solutions développées au § V-1, on peut l'écrire (Σ étant dans le cas général une intégrale)

$$\psi(x,y,z) = \sum_{k_y} C_{k_y} \left[f_0 \exp\left(-\frac{(x-x_0(k_y))^2}{2\xi^2}\right) \right] e^{ik_y y}$$

Il s'agit là d'une décomposition de Fourier sur la base $e^{ik_y y}$. Si on veut que cette fonction soit périodique en y avec un pas Δy :

$$\Delta y = 2\pi/Q$$

Il faut garder uniquement le terme fondamental de vecteur d'onde Q et ses harmoniques de vecteurs d'ondes n Q avec $n \in \mathbb{N}$, ce qui consiste à ne retenir parmi les coefficients de Fourier que ceux pour lesquels:

$$k_y = n Q$$

ce qui conduit à la solution:

$$\psi_Q(x,y,z) = \sum_n C_n \left[f_0 \exp\left(-\frac{(x-x_n)^2}{2\xi^2}\right) \right] e^{inQy}$$

avec:

$$x_0(nQ) = x_n = \frac{nQ\phi_0}{2\pi H}$$

Et, remarquable, les valeurs possibles de x_n font de $\psi_Q(x,y,z)$ une fonction périodique en x et de périodicité:

$$\Delta x = \frac{n Q \phi_0}{2\pi \mu_0 H}$$

La solution est ainsi doublement périodique en x et en y, et le flux du champ à travers une maille ($\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ car nous sommes au voisinage de H_{c2}):

$$\mathbf{B} \Delta x \Delta y = \mu_0 H \Delta x \Delta y = \phi_0$$

est égal à un fluxon!

V-5 Stabilité des réseaux d'Abrikosov

En se donnant le produit $\Delta x \Delta y$, nous nous donnons les périodicités en x et y, à partir desquelles on peut construire un réseau carré, rectangulaire ou hexagonal.

Celui qui sera effectivement réalisé sera celui pour lequel le paramètre d'Abrikosov β_A sera le plus petit.

Les calculs conduisent à :

$$\beta_A = 1.18 \text{ pour le réseau carré}$$

$$\beta_A = 1.16 \text{ pour le réseau hexagonal.}$$

C'est donc le réseau hexagonal le plus stable.

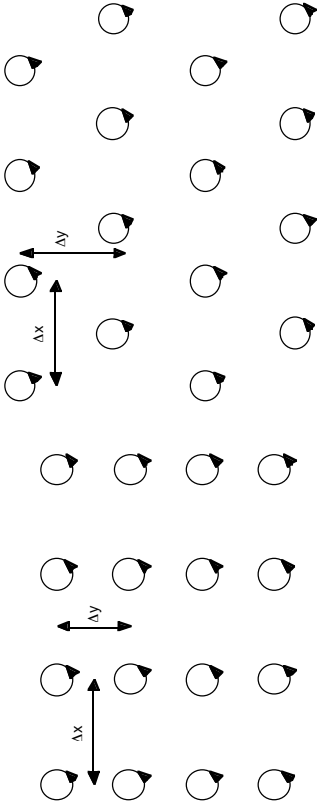


Figure 6: Réseau de vortex carré

Figure 7: Réseau de vortex hexagonal

V- 6 Quelques caractéristiques des réseaux de vortex

ψ au coeur des vortex

ψ tombe à 0 au coeur des vortex (ANT-p.2-59).

Densité de vortex

La densité de vortex: à H_{c2} , les vortex apparaissent spontanément depuis l'état normal où le champ magnétique extérieur $B = \mu_0 H^0 = \mu_0 H$.

A H_{c2} , ψ devient non nul (sauf aux centres des vortex) et on assiste à une ondulation de B autour de $\mu_0 H$.

Les vortex se repoussent légèrement

Nous reviendrons sur ce point lors de l'étude des courbes d'aimantation.

VI Effets et supraconductivité de surface

VI-1 Phénomène physique de supraconductivité de surface

Saint James et de Gennes ont montré qu'en fait la nucléation d'une phase supraconductrice était plus facile en surface d'échantillon qu'en volume.

Cela signifie que, partant des champs élevés, une supraconductivité de surface d'extension ξ^2 apparaît à un champ H_{c3} estimé à :

$$H_{c3} = 1.695 H_{c2}$$

Le diagramme des phases devient ce lui de la figure 8.

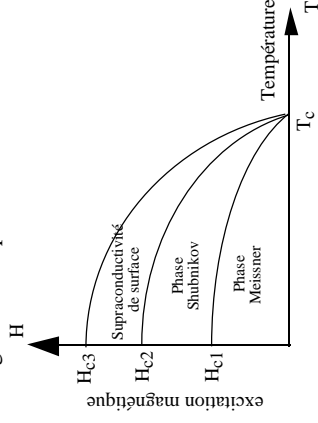


Figure 8

Diagramme des phases faisant apparaître la supraconductivité de surface entre H_{c3} et H_{c2} .

VI-2 Conditions aux limites

Le traitement de ce phénomène passe tout d'abord par un réexamen des conditions aux limites dans un supraconducteur.

Supraconducteur isolé

Lorsqu'un supraconducteur se trouve dans le vide, ou un isolant parfait, les paires supraconductrices n'en sortent pas spontanément, ce qui se traduit en disant que, en surface, la composante normale de la densité de courant est nulle :

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \Big|_{\text{surface}} = 0$$

C'est une condition dont nous avons tenu compte au § V-2 du chapitre II lors de l'établissement de la jauge de London.

Dans la théorie de Ginzburg-Landau, cette condition devient :

$$\left(\frac{\hbar}{i} \nabla \psi - q \mathbf{A} \psi \right) \cdot \mathbf{n} \Big|_{\text{surface}} = 0$$

Supraconducteur en contact avec un métal

Sur des arguments assez difficiles, De Gennes a montré que, lorsque le supraconducteur est en contact avec un métal, cette condition se généralise en :

$$\left(\frac{\hbar}{i} \nabla \psi - q \mathbf{A} \psi \right) \cdot \mathbf{n} \Big|_{\text{surface}} = \frac{1}{b} \psi$$

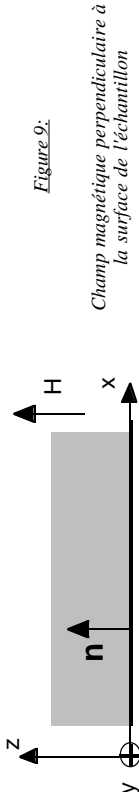
où b est appelé longueur de De Gennes.

Cette équation exprime que les électrons supraconducteurs possèdent une composante perpendiculaire à la surface et qu'ils sont susceptibles de passer de l'un à l'autre des matériaux. Cela signifie aussi que la supraconductivité pourra déborder du

supraconducteur dans le métal; c'est ce que l'on appelle les effets de proximité et ce sera la base de l'interprétation de phénomènes spectaculaires comme les réflexions de Andreev.

VI-3 Champ magnétique perpendiculaire à la surface

Envisageons tout d'abord le cas où le champ magnétique dirigé suivant Oz est perpendiculaire à la surface de l'échantillon (figure 9).



Avec les composantes de chacun des vecteurs:

$$\mathbf{A} = (0, \mu_0 H_x, 0) \quad \nabla\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) \quad \mathbf{n} = (0, 0, 1)$$

L'équation:

$$\left(\frac{\hbar}{i} \nabla\psi - q \mathbf{A} \psi \right) \cdot \mathbf{n} \Big|_{\text{surface}} = 0$$

devient:

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} \Big|_{\text{surface}} = 0$$

qui est une condition à laquelle satisfaisait déjà $\psi(\mathbf{r}) = f(x) \exp -i(k_y y + k_z z)$, la solution du paragraphe précédent pour $k_z = 0$, qui est précisément la valeur de k_z à H_{c2} .

La condition de surface que nous venons de rappeler n'apporte rien de nouveau et ne vient pas modifier la condition d'apparition d'une solution non nulle du paramètre d'ordre.

Il n'y a aucune raison de voir apparaître de supraconductivité de surface.

VI-4 Champ magnétique le long de la surface

Considérons maintenant le cas où le champ magnétique est appliqué dans une direction contenue dans la surface de l'échantillon.

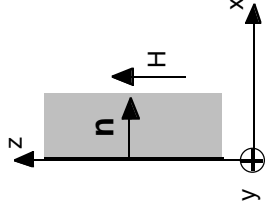
Les composantes des vecteurs deviennent

$$\mathbf{A} = (0, \mu_0 H_x, 0) \quad \nabla\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) \quad \mathbf{n} = (1, 0, 0)$$

et la solution doit satisfaire à :

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} \Big|_{\text{surface}} = 0$$

condition à laquelle ne satisfait pas la solution précédente.



Par des méthodes d'images comme on le fait pour calculer le potentiel électrique d'une charge ponctuelle et d'un plan équipotentiel, ou encore le champ de contrainte engendré par une dislocation au voisinage d'une surface, on peut montrer qu'il existe une solution non nulle au voisinage de la surface (TIN-p.131):

$$\psi(x,y,z) = f_0 e^{ik_x y} \exp - \frac{(x - x_0)^2}{2 \xi^2} \quad \text{avec} \quad x_0 = \frac{\xi}{\sqrt{\pi}}$$

Cette solution est stable jusqu'à H_{c3} :

$$H_{c3} = \left(\frac{\pi}{1 - \pi} \right)^{1/2} \frac{\phi_0}{2 \pi \mu_0 \xi^2} = 1.66 H_{c2}$$

On a donc dans ce cas géométrique de champ appliqué parallèlement à la surface une supraconductivité de surface qui s'étend sur une distance de l'ordre de grandeur de ξ .

Elle se manifeste par une résistivité nulle (du moins si l'intensité du courant est suffisamment faible) mais n'est pas visible par mesure magnétique car une trop faible fraction de l'échantillon est conservée (BUR-p.107).

Avant l'identification de ce phénomène par Saint James et De Gennes, il était considéré comme un effet d'impureté ou de pollution,

.. bref l'argument habituel lorsqu'on ne comprend pas un résultat de mesure.

VI-5 Supraconducteurs de type I

Avec ce nouveau champ H_{c3} , on fait apparaître, comme on le voit au tableau I, 2 variantes de supraconducteurs de type I:

$\kappa < 0.418$	$H_{c2} < H_{c3} < H_c$	Supraconducteur de type I
$0.418 < \kappa < 0.707$	$H_{c2} < H_c < H_{c3}$	
$\kappa > 0.707$	$H_c < H_{c2} < H_{c3}$	Supraconducteur de type II

Tableau I : Classification des types et variantes de supraconducteurs

Les supraconducteurs de type II satisfont toujours à:

$$\kappa > 0.707 \text{ et } H_c < H_{c2} < H_{c3}$$

Les supraconducteurs de type I présentent 2 variantes:

$$H_{c2} < H_{c3} < H_c \quad \kappa < 0.418$$

Le champ critique H_c est le champ limite de supraconductivité. Mais comme nous l'avons déjà noté, si la supraconductivité disparaît bien à H_c lorsque l'on fait croître le champ, elle ne réapparaît lors de la descente en champ que lorsque la nucléation de phase supraconductrice est possible. Au § IV-5, nous avions avancé H_{c2} comme champ de nucléation. En fait, celle-ci se fait à partir de la surface à H_{c3} situé en dessous de H_c .

$$H_{c2} < H_c < H_{c3} \quad 0.418 < \kappa < 0.707$$

Cette fois, avec $H_{c3} > H_c$, il y a apparition de supraconductivité de surface avant la transition brusque en volume. J.P. Burger décrit la manifestation de ce phénomène (BUR-p.108).

VI-6 Effets de proximité

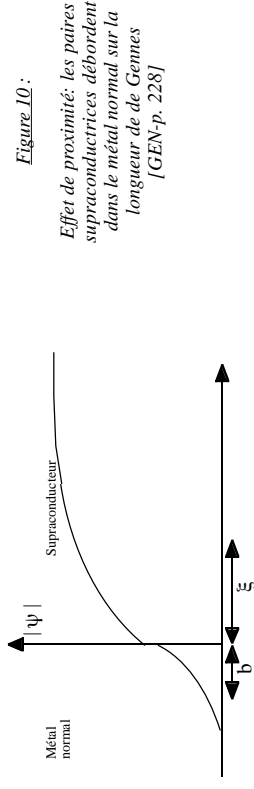
Intermédiaire entre la situation de volume et le comportement de surface, se trouve le cas d'un supraconducteur en contact avec un autre matériau, conducteur, magnétique, ou diélectrique.

Les possibilités sont multiples; elles peuvent être naturelles dans des alliages biphasés (eutectiques lamellaires par exemple) ou obtenues artificiellement par dépôt sous vide.

Le chapitre V du livre de J.P. Burger (BUR-p.125) et l'article de G. Deutscher et P.G. de Gennes (CLA-p.1005) leur sont consacrés. Des travaux importants ont été menés sur ce thème dans le groupe d'Orsay dans les années 65.

Dans le chapitre de J.P. Burger est abordé entre autre, le cas d'un supraconducteur recouvert d'un métal normal et le cas de bicouches N/S (à cette époque on les appelait bilames)

Le traitement de ces problèmes va au delà des objectifs de ce cours.



Le point essentiel est que, à l'interface supraconducteur / métal normal, les paires de Cooper vont s'évanouir dans le métal normal (figure 10). Elles ne sont plus cantonnées strictement dans le supraconducteur comme c'était le cas de l'interface supraconducteur/vide.

Les paires de Cooper ont donc une composante de vitesse perpendiculaire à l'interface qui n'est plus nulle et se traduit par la condition aux limites:

$$\left(\frac{\hbar}{i} \nabla \psi - q \mathbf{A} \psi\right) \cdot \mathbf{n} \Big|_{\text{surface}} = \frac{i}{b} \psi$$

où b est la longueur de de Gennes qui traduit la distance moyenne qu'atteignent les paires dans le métal normal.

La supraconductivité de surface telle qu'elle apparaissait à H_{c3} , est remplacée par une supraconductivité d'interface. La rupture étant moins brutale, on fait un pas vers le massif avec un champ critique d'interface compris entre H_{c2} et H_{c3} .

Dans les systèmes bicouches de films minces normal/supraconducteur (N/S), les paires supraconductrices venant s'évanouir dans le métal normal, l'ensemble de la supraconductivité de la couche supraconductrice est affectée et la température critique du système N/S noté T_{cNS} devient inférieure à T_c .

Ces effets ouvrent un immense champ d'études.

VII Réseaux de vortex en phase de Shubnikov

VII-1 Mise en garde: les supraconducteurs doux

Dans tout ce chapitre en général et la partie que nous abordons en particulier, nous oublions toute interaction entre les vortex et les défauts des échantillons. Les vortex peuvent se déplacer sans frottement et nous ne parlons que des situations d'équilibre.

Le supraconducteur est idéalement doux, comme l'est un métal adouci dans lequel les dislocations se meuvent librement et un matériau magnétique doux au sein duquel les parois de domaines se meuvent tout aussi librement.

Toute personne qui a travaillé dans l'un ou l'autre de ces domaines connaît l'importance des interactions entre les défauts et les dislocations ou les parois de domaine. Elle sait bien que ce sont ces mécanismes qui, dans une large mesure, donnent à chacun des matériaux leurs propriétés macroscopiques.

Il en sera de même des supraconducteurs et ce point est réservé au chapitre suivant.

VII-2 Réseau de vortex au voisinage immédiat de H_{c2}

C'est le réseau d'Abrikosov que nous avons vu précédemment. Il naît spontanément à partir des fluctuations critiques lorsque le champ est abaissé depuis les forts champs.

VII-3 Multiplication des vortex à partir de H_{c1}

Avant d'entreprendre quelques calculs, voyons une description qualitative des mécanismes de multiplication des vortex dans un échantillon infiniment doux, lors de l'augmentation du champ magnétique \mathbf{H} à partir des champs nuls.

On dispose d'un supraconducteur sous forme de cylindre très long dont la surface de base est S . Ce cylindre est plongé dans un champ magnétique extérieur $\mathbf{B}^0 = \mu_0 \mathbf{H}^0$ créé par un grand solénoïde. On dira que ce cylindre est attaqué par un flux total $\phi = B^0 S$. Dans la suite on choisira $S = \text{unité de surface}$.

Dans l'état Meissner, le champ magnétique est nul en tout point de l'échantillon et les lignes de champ contournent l'échantillon. Il y a bien quelques zones en bout de cylindre où les lignes de champ sont distordues. Ces effets sont négligés en raison de la très grande longueur du cylindre, ce qui revient à dire qu'il n'y a pas de champ démagnétisant et que le champ magnétique est uniforme $\mathbf{H} = \mathbf{H}^0$.

Dans cet état, l'aimantation par unité de longueur de cylindre de section unité est:

$$\mu_0 \mathbf{M} = \langle \mathbf{B} \rangle - \mu_0 \mathbf{H} = -\mu_0 \mathbf{H}$$

Lorsque le champ \mathbf{H} atteint H_{c1} , ΔG_D l'emporte sur ϵ_1 avec:

$$H_{c1} \phi_0 = \epsilon_1$$

Il devient favorable d'introduire un vortex et d'offrir pour le flux de \mathbf{B} un canal de traversée de l'échantillon. En raison de la forme de l'échantillon, \mathbf{H} reste inchangé, mais \mathbf{B} n'est plus uniformément 0.

$$A \mathbf{H} = H_{c1} \hat{\mathbf{z}}$$

$$\langle \mathbf{B} \rangle = 1 \phi_0 \quad (1 \text{ par unité de surface})$$

$$M = \phi_0 - \mu_0 H_{c1}$$

Mais ce canal ne supportant qu'un fluxon, on pourrait imaginer assister à la formation immédiate d'un second fluxon, ce qui fournirait 2 canaux de traversée pour le flux.

Mais il y a problème. En raison de l'énergie d'interaction positive entre vortex (forces répulsives) il est plus difficile d'introduire un second vortex qu'un premier vortex. Le travail requis n'est plus seulement ϵ_1 mais c'est $\epsilon_1 + W_{12}$ où W_{12} est l'énergie d'interaction entre les vortex. Le second vortex pourra se former favorablement à un champ H_{cv2} : lorsque sera réalisée la condition:

$$H_{cv2} \phi_0 = \epsilon_1 + W_{12}$$

A ce champ H_{cv2} :

$$\langle \mathbf{B} \rangle = 2 \phi_0 \quad (2 \text{ par unité de surface})$$

$$M = \phi_0 - 2\mu_0 H_{cv2}$$

L'introduction d'un troisième vortex aura lieu au champ H_{cv3} tel que:

$$H_{cv3} \phi_0 = \epsilon_1 + W'_{13} + W'_{23}$$

où W'_{13} et W'_{23} sont les énergies potentielles d'interaction entre le troisième et les 2 premiers vortex. Il en va de même pour le n ème vortex qui interagira avec le $n-1$ déjà formé.

Au champ H_{cvn} :

$$\langle \mathbf{B} \rangle = n \phi_0 \quad (n \text{ par unité de surface})$$

$$M(H_{cvn}) = n \phi_0 - n \mu_0 H_{cvn}$$

Cette discussion explique pourquoi au dessus de H_c l'aimantation tend progressivement vers 0 et ne chute pas à 0 comme cela se passerait si se formaient spontanément à ce champ n vortex tels que:

$$n \phi_0 = \mu_0 B^0 S = \mu_0 H^0 S$$

Cette décroissance progressive de $-M$ à partir de H_{c1} que l'on présente dans tous les ouvrages correspond bien à une succession d'états d'équilibre.

VII-4 Enthalpie libre d'un système à n vortex

Nous voulons déterminer la densité de vortex d'équilibre $n(H)$ dans le matériau en fonction du champ H appliqué et évaluer mathématiquement H_{c1} , la condition d'apparition du n^{ème} vortex [CLA-p.836].

On se souvient des discussions sur l'enthalpie libre de formation d'un vortex avec ses trois composantes:

- i) ΔG_{con} Enthalpie libre de condensation
- ii) ϵ_1 Energie libre de formation d'un vortex
- iii) $-\mu_0 \mathbf{H} \mathbf{B}$ Enthalpie libre de déplacement (par unité de volume)

qui vont se traiter ainsi:

(i) continue à être négligé car il a été estimé être inférieur au terme ii) (voir néanmoins discussion § du chapitre V)

ii) doit être modifié en ajoutant l'énergie potentielle d'interaction des vortex entre eux.

Dans un arrangement périodique, tous les vortex qui portent le même moment ϕ_0 , voient le même champ (créé par les autres). En particulier, le vortex situé à l'origine voit le champ $B(0)$:

$$B(0) = \sum_j \frac{\phi_0}{2\pi \lambda^2} K_0 \left(\frac{r_j}{\lambda} \right)$$

où la somme s'effectue sur tous les r_j , centres de tous les vortex autres que celui situé à l'origine.

Le terme d'énergie libre pour une assemblée de n vortex sera développée au chapitre suivant. On verra qu'elle s'écrit (§ II-3, chapitre IX):

$$\epsilon_n = n \epsilon_1 + n \frac{1}{2} \phi_0 B(0) = \frac{n \phi_0}{4\pi \mu_0 \lambda^2} \ln \left(\frac{\lambda}{\xi} \right) + \sum_j \frac{n \phi_0^2}{2\pi \mu_0 \lambda^2} K_0 \left(\frac{r_j}{\lambda} \right)$$

$$\epsilon_n = n \phi_0 H_{c1} + \sum_j \frac{n \phi_0}{2\pi \mu_0 \lambda^2} K_0 \left(\frac{r_j}{\lambda} \right)$$

(iii) Enthalpie libre de déplacement.

$$- \int_{\text{volume}} \mathbf{H} \mathbf{B} \, dt$$

où (en l' absence de champ démagnétisant) H est le champ extérieur H^0 .

\mathbf{B} étant le champ magnétique porté par les vortex que l'on déplace:

$$\int_{\text{volume}} \mathbf{B} \, dt = \mathbf{B} \, S \, l = n \phi_0 \, l$$

$$\Delta G_d = n \mu_0 H \phi_0$$

L'enthalpie libre totale du système à n vortex sous le champ H est donc:

$$\Delta G = n \phi_0 H_{c1} + \sum_j \frac{n \phi_0^2}{2\pi \mu_0 \lambda^2} K_0 \left(\frac{r_j}{\lambda} \right) - n \phi_0 H$$

VII-5 Densité de vortex et réseau de vortex d'équilibre

Rechercher le nombre de vortex sous le champ H , c'est chercher pour quel n , ΔG est minimum à H et donc écrire:

$$\frac{\partial \Delta G}{\partial n} (n_{eq}) = 0$$

Avant de procéder à cette minimisation, il faut faire un choix de réseau puisque les positions r_j vont dépendre de ce choix.

Ensuite, pour des raisons de simplification de calcul, on peut envisager une limitation d'ordre de voisinage à prendre en considération. La fonction de Hankel K_0 décroissant exponentiellement, on peut se restreindre aux premiers voisins.

En faisant l'hypothèse d'un réseau hexagonal, le vortex central est entouré de 6 vortex distants de d :

$$d = \left(\frac{1}{n/3} \right)^{1/2}$$

En remplaçant r_j par d dans l'expression de ΔG et en substituant à la sommation une multiplication par 6, on obtient ΔG en fonction du seul n (à H =constante). Moyennant quelques approximations, on trouve:

$$n = \frac{2}{\sqrt{3} \lambda^2} \left\{ \ln \left[\frac{3\phi_0}{4\pi \mu_0 \lambda^2 (H - H_{c1})} \right] \right\}^{-2} \quad [\text{PAR-p.837}]$$

ce qui en reportant cette valeur dans ΔG fournit l'enthalpie libre totale du réseau hexagonal.

Le même calcul mené avec d'autres hypothèses de réseaux permet de déterminer leurs stabilités respectives.

Le réseau hexagonal est généralement le plus stable(?)

VIII- Aimantation d'un échantillon de supraconducteur idéalement doux

VIII-1 Evolution schématique de l'aimantation

Il apparaît donc que, à partir du champ critique H_{c1} , un réseau de vortex de plus en plus dense s'installe dans l'échantillon.

L'aimantation décroît avec la densification du réseau de vortex et elle tend vers 0 à H_{c2} . Comme nous l'avons vu, si elle ne chute pas brusquement à 0 à H_{c1} , c'est que les vortex se repoussent et n'absorbent pas tout le flux de champ magnétique qui attaque l'échantillon.

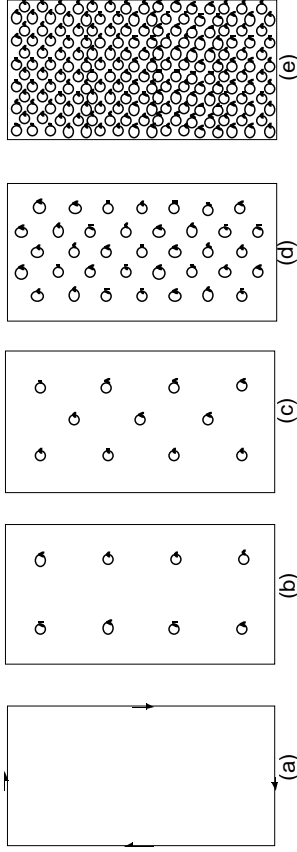
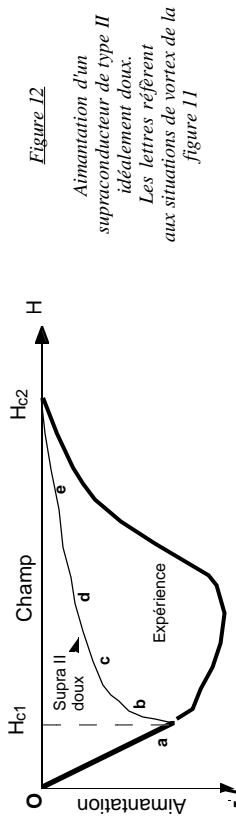


Figure 11: Evolution de la densité de vortex dans un supraconducteur de type II idéalement doux. Les champs sont indiqués sur la figure 12



VIII- 2 Aimantation au voisinage de H_{c1} pour un échantillon très long

A partir de la valeur n déterminée au paragraphe précédent, on peut déduire $\langle B \rangle$ et l'aimantation M:

$$\langle B \rangle = n \phi_0 \text{ et son aimantation } M = n \phi_0 - H$$

soit:

$$M = \frac{2\phi_0}{\sqrt{3} \lambda^2} \left\{ \ln \left[\frac{3\phi_0}{4\pi\mu_0\lambda^2 (H - H_{c1})} \right]^{-2} \right\} - H$$

Cette relation décrit l'aimantation de la figure 12 entre a et b.

VIII-3 Aimantation au voisinage de H_{c2} pour un échantillon très long

Au voisinage de H_{c2} , il faut reprendre le réseau de vortex d'Abrikosov et tenir compte des effets non linéaires quantifiés par β_A . Comme montré par L. Fetter et P. Hohenberg [CLA-p.850]

$$B = \mu_0 H - \frac{\mu_0 (H_{c2} - H)}{(2 \kappa^2 - 1) \beta_A} \quad M = - \frac{H_{c2} - H}{(2 \kappa^2 - 1) \beta_A}$$

Cette relation décrit l'aimantation de la figure 12 entre e et H_{c2} .

VIII-4 Aimantation d'un échantillon de forme quelconque

Si on considère un échantillon de forme quelconque, il faut tenir compte du champ démagnétisant $H = - N I$ où N est le facteur de forme.

Le profil d'aimantation dépend donc de sa forme et quelques exemples sont représentés à la figure 13 [CLA-p.842].

VIII-5 Résultats expérimentaux

Voir par exemple article de B. Serin [CLA-p.925] et le chapitre X de ce cours où sera introduite l'interaction entre les vortex et les défauts du matériaux, ce qui conduit à de profondes modifications.